புகுமுக வகுப்புக் கணிதம்-III

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர்

கு. இராஜகோபாலன், எம். ஏ., எல். டி.,

ஓய்வுபெற்ற முதல்வர்,

சர் தியாகராயர் கல்லூரி,

சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண் — 351

புகுமுக வகுப்புக் கணிதம்-III

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர்

சு. இராஜகோபாலன், எம். ஏ., எல். டி.,
ஓய்வுபெற்ற முதல்வர்,
சர் தியாகராயர் கல்லூரி,
சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

Supplement--August, 1972

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 351

© Tamil Nadu Text Book Society

MATHEMATICS for P.U.C.–Book-III

K. RAJAGOPALAN

Price Rs. 4-60

'Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.'

Printed by
KUMARAN PRESS,
298, Mint Street,
Madras-1.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்

(தமிழகக் கல்வி-உள்ளாட்சித் துறை அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பன்னிரண்டாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டு தோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்ல வேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல் தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாட நூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'புகுமுக வகுப்புக் கணிதம்-III' என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 351 ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை 386 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நா் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

பக்கம்

நுண்கணிதம்
(Calculus)

1. சார்புகள், எல்லைகள், தொடர்ச்சி, வரைபடங்கள் முதலியவற்றின் விளக்கங்கள் ... 1
2. வகையிடல் 31
3. வகைகெழுவின் பயன்பாடுகள் ... 61
4. தொகை காணலும் அதன் பிரயோகங்களும் ... 117
5. வரையறுத்த தொகையும் அதன் பிரயோகங்களும் 135

விடைகள் 179

கண இயற்கணிதம்
(Set Algebra)

1. கணக் கொள்கை 195
2. சார்பலக் கொள்கை 215
3. ஒரு சமனின்மையின் (அசமன்பாட்டின்) தீர்வுக்கணம்பற்றிய வரைபட விளக்கம் ... 224

கலைச்சொற்கள் 233

நுண்கணிதம்
(CALCULUS)

1. சார்புகள், எல்லைகள், தொடர்ச்சி
(Functions, Limits, Continuity)

I. சார்புகள், எல்லைகள், தொடர்ச்சி, வரைபடங்கள் முதலிய வற்றின் விளக்கங்கள் (Functions, Limits, Continuity and Graphs)

1·1. தோற்றுவாய்

ஆங்கில நாட்டுப் பெரிய கணித மேதையான ஐஸக்நியூடன் என்பவராலும், ஜெர்மனி நாட்டுத் தத்துவ அறிஞரும், கணித மேதையுமான இலெய்ப்னிட்ஜ் (Leibnitz) என்பவராலும் ஒருவரை யொருவர் சம்பந்தப்படாமலே நுண்கணித முறைகளைக் கண்டு பிடித்தனர் என்பது யாவர்க்கும் உடன்பட்டதொன்ருகும்.

நவீன கணிதமானது பெரும்பாலும் நுண்கணிதத்தை அடிப் படையாகக் கொண்டே அமைந்துள்ள தென்னலாம். இம்முறை யானது விஞ்ஞானம், பொறியியல் ஆகியவற்றின் பிரிவுகளனைத் தினும் பேரளவு பயன்பட்டு நிற்கின்றது. கணிதம், இயற்பியல் முதலிய துறைகளில் இந்நாளில் காணப்படும் அபிவிருத்திக் கெல்லாம் இந்நுண்கணிதமே அடிப்படைக் காரணமாகும். கணிதத் துறையின் வரலாற்றிலேயே இந்நுண்கணிதத்தைக் கண்டுபிடித்து, அபிவிருத்தி செய்ததொன்றே அரும்பெரும் சாதனையாகுமென அறிவியல் வல்லுநர் யாவரும் நம்புகின்றனர்.

1.2. தொடர்ச்சியான மாறுபாடு (Continuous variation)

ஒரு மாறி (Variable) யென்பது பல்வேறு எண் மதிப்புகளை யேற்கத்தக்கதொரு பரிமாணமாகும்.

ஒரு பொருளின் வெப்பநிலை, ஒரு குளத்தில் எறிந்த கல்லால் விளையும் தரங்க (ripple) த்தின் பரப்பு, ஆரம்ப நிலையிலிருந்து இயக்க நிலை பெற்றதொரு பொருள் சென்ற தூரம் ஆகியவை

யெல்லாம் ஒரு மாறியாகிய பரிமாணத்தின் தன்மையைப் புலப் படுத்தும் நிகழ்ச்சிகளாகும். அத்தகையதொரு மாறியானது *u*, *v*, *w*, *x*, *y*, *z*, *t* முதலாகியவை போன்ற எழுத்துகளுள் யாதொன்றுலேனும் குறிக்கப்படும்.

ஒரு மாறிலி (constant) என்னும் நிலையெண்ணுவது எடுத்துக் கொண்ட விடயத்திற்கு ஏற்றதாகிய நிலையான மதிப்பைப் பெறு வதாகும்.

ஓரறையின் நீளம், ஈரிடங்களுக்கு இடையிலுள்ள தூரம் ஆகியவை ஒரு மாருத நிலையெண்ணுக்கு உதாரணங்களாகும். வழக்கமாக, *a*, *b*, *c*. *d* என வரும் முன்னிலை எழுத்துகளால் ஒரு மாறிலி குறிக்கப்படும்,

$S = ut + \frac{1}{2}at^2$ என்னுஞ் சமன்பாட்டில், *s*, *t* என்பன மாறி களாம்; அந்நிலையில் *u*, *a*, $\frac{1}{2}$ என்பன மாறிலிகளாம். இங்கு மாறிலிப் பரிமாணங்கள் இருவகையாக இருக்கக் காண்கின்றேம் $\frac{1}{2}$ என்பது போன்ற மாறிலியானது எக்காலத்தும் ஓரே மதிப்புடை யதாதலால், மாருத தனி மதிப்பெண் (absolute constant) எனப் படும். *u*, *a* போன்ற மாறிலிகள் எந்த நிலையான மதிப்பையேனும் பெறும். ஒரு குறிப்பிட்ட பிரச்சினையைப் பொறுத்தமட்டில்தான் இந் நிலைமை பொருந்தும். அத்தகையவை அறிகுறியாகிய அல்லது தாற்காலிகமான மாறிலிகளாம் (Symbolic or arbitrary onstants) எனக் கருதப்படும்.

ஒரு மாறியானது சாத்தியக் கூருகப் பெறக்கூடிய மதிப்பு களின் மொத்தத் தொகுப்பும் அதனது எட்டுதொலைவு (range or field) எனக் கொள்ளப்படும்.

1.3. சார்புகள் (Functions)

அன்றுட வாழ்க்கையில் நமது அனுபவத்திலும் விஞ்ஞானப் பிரச்சினைகளிலும் ஆய்வுக்குரிய எந்தப் பரிமாணமும் பல்வகை யான இராசிகளை அனுசரித்திருக்கவும், அவற்றுள் ஒன்றையோ பலவற்றையோ யொட்டி யுண்டாகும் மாறுதல் அம் முழுப் பரிமாணத்தையே பாதிக்கவும் காண்கின்றேம். யாங்ஙனமெனில், ஓரிடத்தின் தட்பவெப்ப நிலையானது அதன் உயரத்தையும், அக்ஷரேகையையும், கடலுக்கு அணித்தாதல் ஆகியவற்றையும் அனுசரித்திருத்தலை அறிகிறேம். மேலும், குறிப்பிட்ட நிறையுள்ள தொரு வாயுவினது கனபரிமாணமானது அதன் வெப்பநிலையையும், அஃது உள்ளாகிக் கிடந்த அழுத்தத்தையும் பொறுத்துள்ள

தாகும். ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பு அதன் அடிக்கோட்டையும் குத்துயரத்தையும் பொறுத்துள்ளதாகும்.

இங்ஙனம் ஒரு பரிமாணமானது பல்வேறு பரிமாணங்களை யொட்டியுள்ள நிலைமையைக் கணித பரிபாஷையில் சார்பு உறவு (Functional relationship) அல்லது சார்பு தொடர்பு என்பர். கணித விவரணம் என்பது, சுருங்கக் கூறுங்கால், மாறிகளின் இடையே காணக்கிடக்கும் தொடர்பேயாகும். மாறிகளின் தொடர்புகளைக் குறியீடு செய்து விளக்கஞ் செய்யும் முறைமைக்கு வழங்கும் சொல் சார்பு (Function) என்பதாகும்.

$C = 2\pi r$ என்னுந் தொடர்பைக் கருதுவோம். இங்கு C-ன் மதிப்பு r-ன் மதிப்பைப் பொறுத்துள்ளதாகும். r-க்கு ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பைக் கொடுத்தால், அதற்கேற்ப C ஆனது ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பைத் தானும் எய்தும் நிலைமைத்தாகும். நாம் விரும்பும்படியெல்லாம் கொடுக்கும் மதிப்பை ஏற்றுக்கொள்ளும் ஒரு மாறியானது சார்பில் மாறி (Independent variable) என்றும், இதன் விளைவாகத் தனக்குத் தக்க மதிப்பைப் பெறும் மாறியானது சார்புடை மாறி (Dependent variable) என்றும் கூறப்படும். மேற் கூறிய சூத்திரத்தில் r ஆனது சார்பிலா மாறியாகவும், C என்பது சார்புடை மாறியாகவும் இருப்பதுபற்றி, Cஐ r-ன் சார்பு எனக் கூறுகின்றோம். இதனை $C = f(r)$ என்று குறியீடுசெய்து காட்டுகின்றோம். இங்ஙனமே, $r = \frac{C}{2\pi}$ என்று எழுதக் கூடுமாதலால், rஐ C-ன் சார்பாகவும் காண்கின்றோம்.

$2x^2 - 4x + 1$; $3x - 4$; $\sin x$; $\cos x$ என்பன x என்னும் ஒரு மாறியைப் பொறுத்துள்ள சார்புகளுக்கு உதாரணங்களாகும்.

இங்கு, ஒரு நாள் பொழுதில் நிகழும் வெப்பநிலை அந் நாளின் நேரத்தொடு சம்பந்தப்பட்டிருப்பதனைச் சார்பு தொடர்பால் கூற முடியாது. அதனை வரைபடம் மூலமாகத்தான் குறித்துக் காட்ட முடியும் என்பது கவனிக்கத் தக்கதாகும்.

சார்பின் வரைவிலக்கணம் (Definition of a Function)

y ஆனது x-ன் சார்பாக வேண்டுமானால், xஆனது தனக்குரிய மதிப்புகளின் வீச்சில் (range) பெறும் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் ஒத்தனவாகிய நிலைமதிப்புகளை y பெறத்தக்கதாக இருத்தலொன்றே சாலும்.

1.4. (சார்புக்) குறியீட்டு முறை (Notation)

(i) ஒரு மாறியை யொட்டிய சார்புகள் :

y ஆனது x-ன் சார்பாகுமானல், $y = f(x)$ என்றெழுது கின்ரேம். மாறி x-ன் சார்புகளை

$$F(x);\ \phi(x);\ \psi(x)\ \ldots \text{ அல்லது } f_1(x),\ f_2(x)\ \ldots$$

என்பன போன்ற குறியீடுகளால் குறிக்கின்ரேம். f, F, ϕ முதலியன போன்றவை சார்புக்குறிகளேயாமெனக் கருதப்படல் வேண்டும். அவை பெருக்கும் எண்கள் அல்ல. மேலும், $y = f(x)$ என்ருல், $f(a)$ என்பது $x = a$ ஆகுங்கால், $f(x)$-ன் மதிப்பைக் குறிநிலைப் படுத்துவதாகும். இங்ஙனமாகவே,

$$f(x) \equiv 2x^2 - 7x - 5 \text{ என்ருல், } f(0) = -5,\ f(-1) = 4$$

$$f(x+h) = 2(x+h)^2 - 7(x+h) - 5 \text{ எனவாகும்.}$$

(ii) ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளைக் கொண்ட சார்புகள் :

z-ன் மதிப்பானது x, y என்னும் இரண்டு சார்பிலா மாறிகளை யொட்டி அமையுமாயின், z ஐ x, y-களின் சார்பெனக் கூறுவோம். இதனை $z = f(x, y)$ எனக் குறியீடுசெய்து வரைவோம்.

உதாரணம்

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ என்னுந் தொடர்பைக் கருதுவோம். இங்கு r-க்கும் h-க்கும் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பைக் கொடுத்தால், V ஆனது குறிப்பிட்டதொரு மதிப்பைப் பெறுமாதலால், Vஐ r, h-களின் சார்பாகக் கருதுதற்கு இடமுண்டாகின்றது. மேலும், $V = f(x, y, z, u \ldots\ldots)$ என்பது போல மூன்று அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட மாறிகளாலாகும் சார்பைக் குறியீட்டுமுறையால் காட்டலாம்.

பயிற்சி 1.1.

1. (i) எல்லா நிச மதிப்புகளையும் பெற முடியாத மாறிக்கு உதாரணம் தருக.

   (ii) அதன் மாறுபாடு (Field, region) எண்களால் அமையாத மாறிக்கு உதாரணம் தருக.

2. பின் வரும் ஒவ்வொரு வகையிலும் x-ஐ y-ன் சார்பாகக் கூறுக.

(i) $y = x^3$ (ii) $y = 1 + \sqrt{x}$

(iii) $y = 5x^2$ (iv) $y = \sin^{-1}x$.

மேற்கண்ட உதாரணங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் y-ன் எத்தனை மதிப்புகள் x-ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் ஏற்புடையவாகவுள்ளன வென வுணர்த்துக. இங்ஙனமே, y-ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் தகவுடையனவாக x-க்கு எத்தனை மதிப்புகள் உளவென்றும் காட்டுக.

[x-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பும் y-க்கு உரிய ஒரே ஒரு மதிப்புக்கு ஒத்திருக்கக் காணப்படின், yஆனது x-ன் ஒரே மதிப்புடைச் சார்பு (Single valued function of x) எனப்படும். ஆனால், x-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பும் y-ன் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மதிப்புகளுக்குத்தக இருந்தால், yஆனது x-ன் பன்மதிப்புடைச் சார்பு எனப்படும்.

மேலும், $y = f(x)$ என்னும் தொடர்பிலிருந்து $x = \phi(y)$ என்பது போல, y-ன் சார்பாக xஐக் கூறலாம். அப்பொழுது $\phi(y)$ ஆனது ஆதி சார்பினது எதிர்நிலை (inverse) சார்பென வழங்கப்படும்.

3. பின்வரும் கோவைகளிலிருந்து yஐ x-ன் சார்பாகக் கூறுக :

(i) $3xy - x + 2y = 1$

(ii) $y^2 - 3y + 2x = 0$

(iii) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

மேற்கண்ட மூன்று உதாரணங்களில் உள்ளபடி x-க்கும் y-க்கும் உள்ள தொடர்பானது சார்புத் தொடர்பு வடிவாகக் கலப்புற்று நின்றால், y ஐ x-ன் உட்பரு அல்லது மறைவுச் சார்பு (Implicit Function) எனச் சொல்லுவோம். y ஆனது நேரடியாக xஐச் சார்த்தி அறிவிக்கப்பட்டிருந்தால், அப்பொழுது yஐ x-ன் வெளிப்படு சார்பு (Explicit) எனக் கூறுவோம். பொதுவாக, $f(x, y) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டில் ஒரு மாறியை மற்றொரு மாறியின் துணை

அவ்வண்ணம் சாத்தியமில்லவெனினும், yஐ x-ன் சார்பாகவோ, xஐ y-ன் சார்பாகவோ குறிப்பிட்டுக் கொள்ளுவதற்கு அவ்வடிவம் இடந்தரும்.

4. பின்வரும் சார்புகளை ஒற்றைச் (odd) சார்பென்றோ; இரட்டைச் (even) சார்பென்றோ வகைப்படுத்துக:

$$\sin x;\ \cos x;\ \tan x;\ \operatorname{cosec} x;\ \sec x;\ \cot x;$$
$$x^5 + 2x^4 + 3x^3;\ ax^3 + bx;\ x^2 + 1.$$

[$f(-x) = f(x)$ ஆனால், $f(x)$ஐ x-ன் இரட்டைச் சார்பென்றும், $f(-x) = -f(x)$ ஆனால், அங்ஙனமே ஒற்றைச் சார்பென்றும் கருத வேண்டும். ஆனால், இவ்விருவகையினுள் ஒன்றனையும் சாராத சார்புகளும் உள.]

5. திரிகோண சார்புகள் மீள் சார்புகளா காலவட்ட ஒழுங்கு (period) உடைய சார்புகளா என ஆராய்க.

[$f(x) = (x + p) = f(x + 2p)$ ஆனால், $f(x)$ ஆனது p காலவட்டமுடைய x-ன் காலவட்ட வொழுங்குச் சார்பாக அல்லது மீள் சார்பாகக் கருதப்படும்.]

6. (i) சார்புடைச் சார்புக்கு (Function of a Function) ஓர் உதாரணந் தருக.

(ii) $\phi(x, y)$-க்கும் $\phi(xy)$-க்கும் உள்ள வேறுபாட்டைக் கண்டறிக.

7. $f(x) = 3x^2 - 7x - 1$ ஆனால்,

$$f(0);\ \left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right\}$$ ஆகியவற்றின் மதிப்பை அறிக.

8. $f(x, y) = ax^2 + 2hxy + fy^2 + 2yx + 2fy + c$

ஆனால், $f(x, 0)$; $f(0, y)$; $f(0, 0)$ ஆகியவற்றை மதிப்பிடுக.

9. $f(x) = \log \dfrac{1+x}{1-x}$ ஆனால், $f\left\{\dfrac{m+n}{1+mn}\right\}$ என்பதனை $f(x)$ என்னும்படி வுள்ளனவாகிய இரண்டு சார்புகளின் கூட்டுப் பலனாகக் கூறுக.

10. $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{bx-a}$ ஆனால், $f(y)$ஐ x-ன் சுருக்க வடிவத்தில் அமைக்க.

11. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$-ம்,

$f(0) = f(1) = f(2) = -5$-ம்

$f(-1) = -11$-ம் ஆனால், அச் சார்பை அறிக.

12. (i) $f(x) = a^x$ ஆனால், $\dfrac{f(m)}{f(n)} = f(m-n)$ ஆகுமென நிருபிக்க.

(ii) $f(x) = \log x$ ஆனால், $f(a^n) = nf(a)$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

1.5. ஒரு மாறிக்கு உரிய மதிப்புகளின் வரம்பு அல்லது எல்லை (Limit of a Variable)

x என்னும் எண்ணின் தனிப்பெறுமானம் (absolute value) அதாவது மிகை இராசியாக அதன் மதிப்புக் கொள்ளப்படுமிடத்து, x-ன் எண்ணளவு (Modulus) எனப்படும். அது $|x|$ எனக் குறியீடு பெறும். இவ்வாருக $|7| = 7$-ம். $|-7| = 7$-ம் ஆகும். x என்னும் மாறியானது 1·9, 1·99, 1·999, 1·9999........ அல்லது 2·1, 2·01, 2·001 என்பன போல 2-க்கு வர வரக் கிட்டியனவாக விளங்கும் வரிசையான மதிப்புகளைப் பெறுமானல், அப்பொழுது x ஆனது 2-ன் மதிப்பை நோக்கிப் பெயருவதாகக் கூறுகின்றோம். இதனைக் குறியீட்டு முறையால் $x \rightarrow 2$ என வரைகின்றோம். இங்கு 2ஐ, x-ன் வரம்பாகக் கூறுகின்றோம். அத்தகைய நிலையில் $|x-2|$ ஆனது முடிவாக மிகக் குறைந்த மதிப்புடையதாவதாகும்.

x என்னும் மாறியானது வரம்பற்றுப் பெருத்தும் மதிப்புகளை முடிவுருமல் பெறுமானல், அது முடிவிலியாகிய (Infinity) போக்கு அடைவதாகச் சொல்லப்படும். அதனைக் குறியீடு செய்யுங்கால் $x \rightarrow \infty$ என்று வரைவோம். முடிவிலி நிலையை ∞ என்னும் குறியீட்டால் காட்டுகிறேம்.

x என்னும் மாறியானது தொடர்ச்சியான குறை மதிப்புகளைப் பெற்று எண்மானத்தைப் பொறுத்தமட்டில் அதன் மதிப்பு வர வரப் பெரிதும் அதிகரித்துக்கொண்டே முடிவின்றிப் போகுமானல்,

x-ஆனது $-\infty$ ஐ நோக்கிய போக்குடையதாகுமென்று கூறுவோம். அதனை $x = -\infty$ என்று குறியிட்டுக் காட்டலாம்.

∞ என்பதைப் பற்றியதொரு குறிப்பு

$x \to \infty$ என்று கூறுவதைக் கொண்டு, கந்தழி (Infinity) என்பது 10^{100} என்பது போன்றதோர் 'கூகூல்' (Googool) என்னும் மாபெரும் எண்ணாகுமெனக் கருதக்கூடாது. கந்தழியென்பது ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணல்ல. சாதாரணமாக சமம் என்னும் கருத்தில் கொள்வதுபோல $x = \infty$ என்று கொண்டால், அச் சமன்பாடு அர்த்தமற்றதாகும். $x \to \infty$ என்று சொல்லுவது ஒரு குறியீட்டு முறையேயாகும். அதனால் x-ன் மதிப்பு போகப்போக வரையறைவு படாமல் பெருகிக்கொண்டே செல்லுகின்றதென்பதே கருத்தாகும். அதாவது, இறுதியாக வரம்பு கடந்து வளர்கின்றது என்பதாகும்.

மிகச் சிறியதென நம்மால் குறிக்கப்படும் எச்சிறிய மிகை யெண்ணுக்கும் குறைவுடையதாக மாறி x-ன் எண் மதிப்பு மாறுபட்டுக்கொண்டே சென்றால், அது தனது மதிப்புக்கு வரம்பாகப் பூச்சியத்தை நோக்கி நெருங்குகின்றதாமெனக் கொண்டு, $x \to 0$ என்று வரைந்து காட்டுவோம்.

[குறிப்பு : தனது மதிப்புக்கு எல்லையாகப் பூச்சியத்தை நோக்கிச் செல்லும் இயல்புடைய மாறியைக் கழிநுண் (Infintesimal) என்போம்.]

1.6. சார்புகளின் மதிப்பு வரம்புகள் (Limits of Functions)

சார்புகளின் மதிப்புகளில் உண்டாகும் மாறுபாடுகளைக் கண்டறிதல் நுண்கணிதத்தின் நோக்கங்களுளொன்றாகுமாதலால், சார்பிலா மாறியின் பல்வேறு மதிப்புகளையொட்டிச் சார்பினது மதிப்பைக் கண்டறிய வேண்டியவர்களாகின்றோம். y ஆனது x-ன் சார்பாகுமானால், x-க்குக் கொடுத்த மதிப்புக்குத்தக y-க்குப் பொதுவாக ஒரு குறிப்பிட்ட விசேஷ மதிப்பிருத்தல் வேண்டும். எனினும், x ஆனது ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பைப் பெறுங்காலத்தில், y ஆனது அர்த்தமற்றதாயும், யாதொரு நிலையான மதிப்பைப் பெறமாட்டாததாயும் போவதுண்டு. அந்நிலைமை பின்வருமாற்றால் புலனாகும் :

(i) $f(x)$ ஆனது x பெறும் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்புக்கு ஏற்பத் தனக்கென யாதொரு குறிப்பிட்ட மெய்யான மதிப்பைப் பெறாது

நிற்குமானல், அச்சார்பானது x-க்கு ஈந்த அம்மதிப்பைப் பொறுத்த வகையில் நிலைபேறில்லாத தொன்றுமெனச் சொல்லுவோம். உதாரணமாக, x பெறும் குறையெண்களையொட்டி $\sqrt{x}$ ஆனது நிலைபேறின்றி விளங்குதலறியப்படும்.

(ii) பூச்சியத்தால் வகுத்தல்

நாம் வகுத்தல் முறையினைப் பெருக்கல் முறைக்கு எதிர் நிலையுடையதென விவரணம் செய்கின்றோம். அதாவது, $\frac{8}{2} = x$ எனின், $2 \times x = 8$ ஆதற்கு அமைவதோர் நிலையுடைய x என்னும் எண்ணாகுமெனக் கொள்ளுகிறோம். (அ - து.) $x = 4$. இவ்விவரணத்தின்படி $\frac{2}{0} = x$ எனின், $0 \times x = 2$ ஆகும். ஆனால் $0 \times x$ எப்பொழுதுமே 0-மே ஆகும். ஆதலின், அத்தகையதோர் எண் $\frac{2}{0}$ இல்லையாதல் பெறப்படும். இவ்வாறே, a என்பது பூச்சியம் ஆகாவிடத்து, $\frac{a}{0}$ என்பதோர் எண் உளதாகாததாகும்; பகுதி பூச்சியமாதலின்றித் தொகுதியும் பூச்சியமாயின், $\frac{0}{0}$ என்பது y எனின், $0 = y \times 0$ என்னும் நியமத்திற்கு உரியதாக y என்பதோர் எண் உளதாதல் வேண்டுமன்றோ? ஆனால், பெறும் எல்லா முடிவுள்ள மதிப்புகளுக்கும் இஃது ஒக்கும். ஆகவே, $\frac{0}{0}$ என்பது தேறப்படாததோர் (Indeterminate) எண்ணாக விளங்கும். இங்ஙனமே, பகுதியாகப் பூச்சியத்தைக் கொண்டுள்ள எந்த எண்ணும் தேறப்படாத மதிப்பினதாகவே கருதக்கிடக்கும். இவ்வகுத்தல் முறையானது ஒரே முறையான (unique) எண்ணைத் தர இயலாததாகின்றது. ஆதலின், கணிதத் துறையில், பகுதியானது பூச்சியமாகாத வகுத்தல் முறையொன்றே அனுமதிக்கப்படுவதாகின்றது.

எனினும், (i) பூச்சியத்தால் பெருக்கல் முறையில் எவ்வித முரண்பாடும் கிடையாது; ஏனெனில், பெருக்கற்பலன் பூச்சியமாக ஆதலின், $a \times 0 = 0$; $0 \times 0 = 0$.

(ii) $\frac{0}{a}$ எப்பொழுதும் பூச்சியமேயாகும். $a = 0$ ஆகும் காலத்தன்றி, வேறெந்த மதிப்பிற்கும் இது உண்மையாகும். $a = 0$ ஆகுமிடத்து இவ்வகுத்தல் நிலை அனுமதிக்கப்படாத தொன்று

யினும், x-ம் y-ம் ஏககாலத்தில் பூச்சியத்தை நோக்கிச்செல்லும் மதிப்புகளைச் சாரும் நிலைமைக்கண் $\frac{x}{y}$ என்பது ஒரு வரம்பை யெய்தும். இவ் வரம்பு நிலை நுண்கணிதத்தில் கருதப்படும் $\frac{0}{0}$ என்பது பொருளற்றதாயினும், இவ் வரம்பானது குறிப்பிட்ட மதிப்பைப் பெறத்தக்கதாக விளங்கும்.

[குறிப்பு : $\frac{a}{a} = 1$ என்னும் ஒப்புமையோடு உடன்வைத்து $\frac{0}{0} = 1$ எனக் கருதுவோமானால், இது நோக்குமிடத்து வழுவை நிலைப்படும்.

உதாரணமாக, $2 \times 0 = 3 \times 0$ ஆகும். இருமருங்கிணையும் பூச்சியத்தால் வகுப்போமானால், $2 \times \frac{0}{0} = 3 \times \frac{0}{0}$ எனவரும். $\frac{0}{0} = 1$ என்பது ஏற்கப்படுமானால், $2 = 3$ எனக் கிடைக்கும். இது முற்றிலும் வழுவாமன்றே!

பின்வருவனவற்றுள் காணும் தவருன வாதம் (fallacy) என்ன வென்று காண்க :

$x = 2$ ஆகட்டும். அப்பொழுது $x^2 - 4 = 0$ ஆகும். அதாவது $(x - 2)(x + 2) = 0$ ஆகும். இரண்டு பக்கத்திலுள்ளவற்றை $x - 2$ ஆல் வகுக்க, $x + 2 = 0$ எனப் பெறப்படும். நாம் ஆரம்பத்தில் $x = 2$ எனக் கொண்டதால், $x = 2$ எனப் பிரதியிட, நாம் பெறுவது $2 + 2 = 0$ அல்லது $4 = 0$ என்பதாகும். இஃது யாங்ஙனம் ஏற்கப்படும்!]

மேற்கூறியவற்ருன், சில குறிப்பிட்ட சார்புகள் x பெறும் குறிப்பிட்ட மதிப்பையோ, மதிப்புகளையோ யொட்டி யாதொரு குறிப்பிட்ட மதிப்பையும் தாம் தரமாட்டாமல் நிற்குமென்பது நிச்சயமாகின்றது. அந்நிலைகளில் x எய்தச் செல்லும் அக் குறிப்பிட்ட மதிப்பையொட்டி, அதன் சார்பானது எத்தகைய போக்கு உடையதாகுமெனக் கண்டறிய நாம் விரும்புகின்ருேம். அச்சார்பானது ஏதேனும் வரையறுத்ததொரு மதிப்பெல்லையை அடையக் கூடுமோ எனவும் சோதிக்க முயலுகின்ருேம்.

1·7. நுண்கணிதத்தில் அடிப்படை முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது ஒரு மாறியை யொட்டியமையும் சார்பினது எல்லை மதிப்பை (limiting value) ஆராய்ந்து அறியக் கருதுவதேயாகும்.

x என்பதொரு மாறி 3 என்னும் மதிப்பை அணுகட்டும். அதாவது, வரவர 3-க்கு நெருங்கிச் செல்லும் மதிப்புகளை ஏற்பதாகட்டும். அப்பொழுது $f(x) = x^2$ ஆனது வரவர 9க்குக் கிட்டியமதிப்பைப் பெறுமென்பது தெளிவாகின்றது. x-ன் மதிப்பைப் போதிய அளவு 3-க்கு அணுகியதாகச் செய்வதால், x^2-ன் மதிப்பை 9-க்கு நெருங்கி நமது விருப்பம்போல் வேண்டுமளவு கிட்டும்படிக் கட்டுப்படுத்தலாம். அந்நிலைமையில்,

$x \to 3$ பொழுது, சார்பு $f(x) = x^2 \to 9$ என்றெழுதுவோம்.

பொதுவாக, $|f(x) - l|$ ஐ நாம் விருப்பம்போல் எவ்வளவுக்கு எவ்வளவு குறைந்த மதிப்புடையதாகச்செய்யக் கூடுமோ அவ்வளவும் சாத்தியப்படும் நிலைமையுண்டாகும்வண்ணம் $x \to a$ ஆகும் பொழுது, $f(x) \to l$ ஆகும் என்று கூறலாம்.

அதாவது $|f(x) - l|$ ஆனது எவ்வளவு குறைந்தபட்ச மதிப்புஉளதாக வேண்டுமோ, அதனினும் குறைந்த மதிப்புடையதாக்க, $|x - a|$ ஐத் தேவையான அளவு குறைக்கக்கூடும் என்பதாம்.

இதைக்குறிக்க $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ என்றெழுதுகின்றோம்.

பின்வரும் உதாரணமானது இக் கருத்தை விளக்குதற்கு உதவும் சிறந்த மாதிரியாகும். ஆதலின், இது நன்கு கவனித்தற்கு உரியதாகும்.

I. $\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ என்னும் சார்பைக் கருதுவோம். $x = 3$ ஆகும் மதிப்பைத் தவிர்த்து x பெறும் பிற மதிப்புகளுக்கெல்லாம் இச் சார்பு நன்கு விளக்கம் எய்துவதாகும். $x = 3$ ஆகும் பொழுது, $(x-3)$ என்னும் காரணி (Factor) பகுதியினும் தொகுதியினும் ஒருசேரக் கண்ணுறப்படுதலால், அச் சார்பானது $\dfrac{0}{0}$ என்னும் வடிவைப் பெறும். இவ் வடிவ நிலையில் அச் சார்பு பொருளற்றதாகவும், தேறப்படாத மதிப்பினதாகவும் நிற்கும். முதலில் தொகுதியைப் பகுதியால் வகுத்துக்கொண்டு, பிறகு $x = 3$ என்பதனைக் கிடைக்கும் ஈவில் பிரதி செய்தால், $\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$-ன் மதிப்பு $x = 3$ ஆகும் நிலையில் கிடைக்கப் பெறலாம் என்று மாணவர்கள் கருதக்

கூடாது. 0 ஆல் வகுத்தல் அனுமதிக்கப்படாததால், x-ன் மதிப்பு 3 ஆகாத பொழுதே $x-3$ ஆல் வகுத்தல் ஏற்கத்தக்க தாகும். ஆதலின், $x = 3$ ஆகும்போது, அச்சார்பானது நிலை பேரில்லாததாகும் (does not exist).

இனி, $x \to 3$ அதாவது x ஆனது போகப்போக 3-க்குச் சமீபமான மதிப்பைப் பெற்றுக்கொண்டே போவதாகுமிடத்து $\dfrac{x^2-9}{x-3}$ என்னும் சார்பின் போக்கை ஆராய்வோம்.

$x \to 3$ ஆக, $(x-3) \to 0$ ஆகும்; ஆனால் x-க்கு 3 என்னும் மதிப்பைக் கொடாமையால், உண்மையிலேயே பூச்சியமாகி விடாது. ஆகவே $(x-3)$ ஆனது நிச பூச்சியம் ஆகாமையால், உண்மையாகவே வகுத்தலை நிகழ்த்துங்கால் $(x^2-9)/(x-3) = x+3 \; (x \neq 3)$

$\therefore$ $x \to 3$ ஆகுமிடத்து, $(x+3) \to 6$ ஆகும். மேலும் x-க்குக் கொடுக்கும் மதிப்பைப் போதிய அளவு 3ஐக் கிட்டும்படிச் செய்தால், $(x^2-9)/(x-3)$-ன் மதிப்பை 6-லிருந்து எவ்வளவு சிறிய பரிமாணம் வேறுபட்டிருக்க விரும்புகிறேமோ, அவ்வளவுக்கும் குறைவுறச் செய்யலாம்.

$\therefore$ $x \to 3$ ஆகுங்கால், அச்சார்பின் எல்லை மதிப்பு 6 ஆகும். குறியீட்டில் $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = 6$ என வடிவுபடுத்தலாம்.

வேறு வழி

$x = 3 + h$ என்றிடுக. $x \to 3$ ஆனால், $h \to 0$ ஆகும். x-ன் மதிப்பு எவ்வழியிலும் 3-க்குச் சமமாகையால், h-ன் மதிப்பு பூச்சியத்திற்குச் சமமாகாது.

இப்பொழுது,

$$\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(3+h)^2-9}{(3+h)-3} = \frac{6h+h^2}{h} = 6+h.$$

(பூச்சியத்திற்குச் சமமாகாத h என்னும் பரிமாணத்தால் வகுக்குமிடத்தேதான் இது கிடைக்கப்பெறுமெனக் கருதுக.)

$h \to 0$ ஆனால், $6+h \to 6$ ஆகும். மேலும் $\dfrac{x^2-9}{x-3}$-க்கும் 6-க்கும் உள்ள வித்தியாசமாகிய hஐ நாம் எவ்வளவுக்கு

எவ்வளவு மிகக் குறைந்த மதிப்புடையதாக்கி $h \to 0$ ஆகுமாறு செய்யக் கருதுகிறோமோ, அதாவது $x \to 3$ ஆகச் செய்கிறோமோ, அந்நிலையில்,

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} \to 6 \text{ ஆகும்.}$$

குறிப்பு 1 :

$x \to 3$ என்றால் x-ன் மதிப்பு 3 ஐ மிக நெருங்கி அணுகுகிறது எனப் பொருளாகும். ஆனால் x ஆனது 3 என்னும் மதிப்பைக் கொள்கிறது எனப் பொருளல்ல என்பதைக் கவனிக்க வேண்டும். அப்பொழுது $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ என்னும் சார்பலன் 6ஐ மிக நெருங்கி அணுகுகிறது எனப் பொருளாகும்.

குறிப்பு 2 :

$x=3$ ஆகுமிடத்து $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$-ன் மதிப்பு தேறப்படாத நிலையி லிருக்கும்பொழுது, $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$-ன் மதிப்பு நன்கு வரையறுக் கப்படும் மதிப்பைப் பெறுகின்றது. நுண்கணிதத்தில் இவ்வித எல்லை மதிப்புகளைக் கணிப்பது ஒரு முக்கிய அம்சமாகும்.

குறிப்பு 3 :

$x \to a$ ஆகுமிடத்து ஒரு சார்பின் எல்லை மதிப்பைக் கண்ட றியக் கையாளும் மேற்கண்ட செய்முறையானது பொதுவான தொன்றாகும். $(x - a)$வோ அல்லது $(x - a)$-ன் அதிகப்படி அடுக்கோ பகுதியிலும் தொகுதியிலும் வருங்காலத்தில், ஒரு கோவையானது $\frac{0}{0}$ என்ற வடிவையடையுமாயின், அந்நிலையில் மேற்காட்டிய செய்முறை மேற்கொள்ளத்தக்கதாகும்.

$(x-a)$-ன் மதிப்பு எவ்வளவு சிறியதாயினும், பூச்சியமாக வில்லை என்ற நிச்சயம் பிறக்குமிடத்து, $(x - a)$ என்னும் காரணி (factor) அல்லது சினையை நீக்கலாம். இதனால் $x \to a$ ஆகுங்கால், கோவையின் எல்லை மதிப்பை யறியலாம்.

$x \to a$ ஆகுங்கால் ஒரு சார்பின் எல்லை மதிப்பைப் பெறு மிடத்து, அச்சார்பு $x = a$ ஆகும்பொழுது பெறும் மதிப்பைக்

கருதுவதில்லை. $x \to a$ ஆகுமிடத்து, அச்சார்பு எம்மதிப்பை நோக்கிச் செல்லுகின்றதென்பதையே கருதுகிறோம். $x \to a$ ஆகுமிடத்து, ஒரு சார்பின் எல்லை மதிப்பு, $x = a$ ஆகுமிடத்து, அது எம்மதிப்பைப் பெறக் கூடுமோ அதற்குச் சமமாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. சில சமயங்களில் அவ்வாறு சமமாதலும் நேரலாம்.

குறிப்பு 4 :

எத்தன்மையில் $\frac{x^2-9}{x-3} \to 6$ ஆகின்றதென்பது பின்வருமாறு காட்டப்பட்டுள்ளது:

$x = \ldots\ldots\ 3{\cdot}1,\ 3{\cdot}01,\ 3{\cdot}0001,\ 3,\ 2{\cdot}9999,\ 2{\cdot}999,\ 2{\cdot}99$

$y = \frac{x^2-9}{x-3} = \ldots\ldots\ 6{\cdot}1,\ 6{\cdot}01,\ 6{\cdot}0001,\ \frac{0}{0},\ 5{\cdot}9999,\ 5{\cdot}999,\ 5{\cdot}99\ldots\ldots$

இவ்வாறாக, $x = 3$-க்குச் சமீபத்தில் y ஆனது தனக்கு 6 என்னும் மதிப்பைப் பெறாததாயினும் 6-லிருந்து நாம் விரும்பும் அளவுக்குக் குறைந்த பரிமாணம் வேறுபட்டிருக்கும் மதிப்பைத் தனக்கு இரு பக்கத்திலும் அது பெற்று நிற்கக் காண்கின்றோம்.

குறிப்பு 5 :

$y_1 = \frac{x^2-9}{x-3}$-ம், $y_2 = x + 3$-ம் x பெறும் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் ஒத்த மதிப்பையே பெறுவனவாம். எனினும் $x = 3$ ஆகுமிடத்து, y-ன் மதிப்புத் தேறப்படாததாகவும், $y_2 = 6$ ஆகவும் நிற்றலைக் காண்க.

குறிப்பு 6 :

$$\underset{x \to 3}{\text{lt}} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$$ எனப் பார்த்தோம்.

ஆயினும் $x = 3$ ஆகும்போது, $\frac{x^2-9}{x-3}$-ன் மதிப்பு $\frac{0}{0}$, தேறப்படாத ஒன்றாகும்.

இனி, $\underset{x \to 3}{\text{lt}}\ x + 3 = 6$

மேலும் $x = 3$ ஆகும்போது, $x + 3$-ன் மதிப்பும் 6 ஆகும்.

விளக்க உதாரணம்

$\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ ஆனது 2 தசமஸ்தான சுத்தமாக 4-க்குச் சமப்பட்டிருக்க வேண்டுமானுல், x-ன் மதிப்பு 2-க்கு எவ்வளவு சமீபத்தில் கண்டறியத் தக்கதாகும்?

இரண்டு தசமஸ்தான சுத்தமென்றுல் $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ ஆனது 3·95-க்கும் 4·05-க்கும் அதாவது, $3{\cdot}95 < (x + 2) < 4.05$ இடையில் தனக்குரிய மதிப்பைப் பெற்றிருப்பதாகவேண்டும்.

அதாவது, $1.95 < x < 2.05$

,, $-0.05 < (x - 2) < 0.05$

,, $x = 2$ (இரண்டு தசமஸ்தான சுத்தமாக)

II. $x \to \infty$ ஆகுமிடத்து, $\frac{1}{n}$ என்னும் சார்பின் போக்கைக் கண்டறிக.

x ஆனது அளவின்றி மிகை முழு எண்கள் ஊடே அதிகரிப்பதாகுக. xஐப் போதிய அளவுக்கு அதிகமுறச் செய்வதால், சார்பின் மதிப்பைப் பூச்சியத்திலிருந்து எவ்வளவு குறைந்தபட்சப்பரிமாணமேனும் வித்தியாசப்பட்டிருக்கச் செய்யலாம்?

$$\therefore \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

இங்கு $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n} \ldots$ என்னும் எண்களின் தொடர்நிலையைக் கண்டறிக.

n-ன் மதிப்புப் பெருகப் பெருக, தொடர்நிலையிலுள்ள எண்களின் மதிப்பு வரவரக் குறைந்துகொண்டே செல்லுகின்றது. nஐத் தக்க அளவுக்குப் பெரிதாக்க, $\frac{1}{n}$-ன் மதிப்புப் பூச்சியத்திலிருந்து குறைந்தபட்சம் நாம் விரும்பிய அளவுக்குச் சிறிய பரிமாணம் வித்தியாசப்பட்டிருக்கச் செய்யக்கூடும். இந்நிலையில் இத்தொடரின் எல்லை மதிப்பு 0 ஆகுமெனக் கூறுகிறோம்.

[குறிப்பு : n-க்கு நாம் கொடுக்கும் எவ்வித மதிப்பாலும் $\frac{1}{n}$ -ன் மதிப்புப் பூச்சியமாகாமை நோக்கப்படும். ஆதலின், கொடுத்த எண்ணுத் தொடரில் 0 இடம் பெறலாகாமையும் அறியப்படும்.]

III. முடிவிலா வரம்புகள் (Infinite limits)

(i) $\frac{1}{x^2}$ என்னும் சார்பை நோக்குக. $x = 0$ என்னும் நிலைமைக்கண் சார்பானது விவரணத்திற்கு உட்படாது, வலப்பக்கமிருந்து மிகை முழு எண்கள் ஊடாகவோ, இடப்பக்கமிருந்து குறையெண்கள் ஊடாகவோ x ஆனது பூச்சியத்தை நோக்கிய போக்குடையதானுல் $(x \to 0)$, x-ன் மதிப்பைப் போதிய அளவுக்குச் சிறிதாக்க $\frac{1}{x^2}$-ன் மதிப்பை N என்னும் எண் எவ்வளவு பெரியதாயினும் அதைவிடப் பெரிதாகும்படிச் செய்யலாம்.

$$\therefore \underset{x \to 0}{\text{lt}} \frac{1}{x^2} \to \infty,$$

குறிப்பு 1 :

முடிவுரு எல்லைமதிப்பை யுடையதொரு சார்புக்கு இது உதாரணமாகும்.

குறிப்பு 2 :

$x = 0$ ஆகும்பொழுது $\frac{1}{x^2} = \infty$ ஆகுமெனல் பிழையாகும். ஏனெனில், பூச்சியத்தால் வகுத்தல் அனுமதிக்கப்படாமையின் என்க. மேலும், கந்தழி (Infinity) என்பது ஓரெண் அன்று. மேலே விளக்கங் கூறியபடியன்றி, அதற்கெனத் தனிப்பட்ட பொருளில்லை.

(ii) $y = \frac{1}{x}$ என்னும் சார்பை நோக்குக.

$x = 0$ ஆகும்பொழுது சார்பு விவரணத்திற்குள்ளாவதில்லை. ஆனுல், x வரவரச் சிறியதாகி மிகை மதிப்புகளுடே பூச்சியத்தை அணுகுமானுல், $\frac{1}{x}$ ஆனது அளவின்றி அதிகரிப்பதாகும்.

அந்நிலையில் அது எவ்வளவு பெரிதென நம்மால் முற்படக் கருதப் பட்டதோர் எண்ணுள்ளதோ, அவ்வெண்ணிலும் பெரிதாக விளங்கும்.

மிகை எண்களுடே $x \to 0$ ஆகும்பொழுது, $\text{lt}\ \frac{1}{x} \to +\infty$

ஆகும்.

ஆனல் குறையெண்களுடே $x \to 0$ ஆகும்பொழுது,

$$\text{lt}\ \frac{1}{x} \to -\infty \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே, $x \to 0$ ஆகுங்கால், $\frac{1}{x}$-ன் எல்லை மதிப்பு இக் கருத்திற்கிணங்க உளதாகாததொன்ருகும், மேற்காட்டிய சார்பு ஒரு முடிவான மதிப்பையோ அல்லது முடிவான வரம்பையோ கொண்டிராத சார்புக்கு உதாரணமாதலின் என்க.

[குறிப்பு : $x = 0$ ஆகுங்கால், $\frac{1}{x} = \pm \infty$ என்று வரைதல் பிழையாகும்.]

மேற் கூறியவற்ருல், $x = a$ ஆகுங்காலத்துப் பெறப்படும் மதிப்புக்கும், $x \to a$ எனக் கொண்ட விடத்துக் கிடைக்கும் எல்லை மதிப்புக்கும் உள்ள வேறுபாட்டினைக் கவனமாகக் கருத்தில் கொள்ளவேண்டும். x ஆனது a என்னும் மதிப்பை உண்மையில் பெருமல், அதை நோக்கி நெருங்கும் நிலைமையதாயின், $f(x)$ ஆனது அடைய முயலும் மதிப்பு $\underset{x \to a}{\text{lt}} f(x)$ ஆகும் என்றே கொள்ள வேண்டும்.

1.8. தொடருறு சார்புகள் (Continuous Functions)

x ஆனது a-க்கும் b-க்கும் இடையிலுள்ள c என்னும் பரிமாணத் தினூடே வரையறைப்படாத சிற்றளவால் தொடர்ந்து வேறுபட்டு விளங்குமானல், $f(x)$ என்னும் சார்பு a, b-க்களின் இடைவெளியில் தொடர்ச்சி நிலையுடையதாகக் கருதப்படும். y ஆனது கந்தழி (Infinite) யாவதுமில்லை; குறிப்பிட்ட தொரு மதிப்பிலிருந்து மற்ருெரு மதிப்புக்குத் திடீரென்று மாறுபடுவதுமில்லை. ஆனல், y ஆனது வரையறைப்படாத சிற்றளவால் மாறுபடும். இதன் விளைவாக x-ல் நேரும் சிறிய மாற்றம் பூச்சியத்திற்குப் போக்காகு மானல், அதற்கொப்ப y-ல் நேரும் மாற்றமும் பூச்சியத்தை நோக்கிய போக்குடையதாகும்.

ஓரிடத்தில் கண்ணுறும் தொடர்ச்சித் தன்மையைப் பின் வருமாறு விவரணஞ் செய்யலாம் :

ஒரு சார்பானது $x = a$ என்னுமிடத்தில் நன்கு விவரணம் பெறுமாயின், அதாவது $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ஆகுங்கால் $f(a)$ நிலை நிற்குமானால், $f(x)$ என்னும் சார்பானது $x = a$ என்னுமிடத்தில் தொடர்ச்சிநிலையுறுவதாகச் சொல்லப்படும் (பகுதி 1.7 குறிப்பு 3 ஐக் காண்க).

x^n, $\sin x$, $\cos x$ என்பன போன்ற அடிப்படைச் சார்புகளெல்லாம் இத்திறத்தவாகிய தொடர்ச்சிநிலையுடையனவாகும். அவற்றைக் குறித்துக் காட்டும் வரைபடங்களுக்கும் இடையறவுபடாது தொடர்ச்சியுற்றிருக்கக் காண்கின்றோம்.

தொடர்ச்சியுறாச் சார்புகள் (Discontinuous Functions)

(i) ஒரு சார்பானது $x = a$ என்னுமிடத்தில் நன்கு விவரணம் பெறாதாயினும்,

(ii) ஒரு சார்பினது மதிப்பானது ஒரு குறிப்பிட்ட அளவு திடீரென மாறுபடுமாயினும்,

(iii) ஒவ்வொரு பக்கத்திலிருந்தும் $x \to a$ ஆகுங்கால் சார்பானது கந்தழிநிலை யடையுமாயினும்,

(iv) $x = a$ ஆகும்பொழுது, $f(x)$ன் மதிப்பு $x \to a$ ஆகும் பொழுது பெறும் எல்லை மதிப்புக்குச் சமமாகாத பொழுதும், ஒரு சார்பானது $x = a$ என்னுமிடத்துத் தொடர்ச்சியுறாததெனச் சொல்லப்படும்.

உதாரணம் :

$y = \tan x$ ஆனது $x = \frac{\pi}{2}$ என்னுமிடத்தில், தொடர்ச்சியற்றதாகும்.

[(i) ஏனெனில், $x = \frac{\pi}{2}$ என்னுமிடத்தில் y விவரணமெய்தவில்லை. மறுபடியும் வலமிருந்து இடமேனும், இடமிருந்து வலமேனும் செல்லுங்கால், $x \to \frac{\pi}{2}$ ஆகும் பொழுது $y \to \pm \infty$ ஆகின்றது. x ஆனது $\frac{\pi}{2}$ என்னும் மதிப்பினூடே அதிகரிக்குங்கால்,

y ஆனது திடீரென்று $+\infty$-லிருந்து $-\infty$-க்கு மாறுவதால், $x = \frac{\pi}{2}$ என்னுமிடத்தில் வரைபடமானது பெரும் பிளவு பெறுவதைப் பார்க்கிறோம்.

(ii) $x = 0$ என்னுமிடத்தில் $y = \frac{1}{x}$ தொடர்ச்சியுறுததாகின்றது. இங்ஙனமே,

(iii $y = \frac{1}{x^2}$ என்பதும் $x = 0$ என்னுமிடத்தில் தொடர்ச்சியறுபட்டிருக்கக் காண்கின்றோம்.)

1.9 மதிப்பு வரம்பு பற்றிய சில தேற்றங்கள் (Some Limit Theorems)

(i) x என்பதொரு மாறியானது y, z என்னும் வேறிரு மாறிகளுக்கு இடைப்பட்டிருக்குங்கால், அவ்விருமாறிகளும் a என்னும் பொது வரம்பை அணுகுமானால், x-ம் a ஐயே தனக்குரிய எல்லை மதிப்பாகப் பெறும்.

(ii) u, v முதலியன x-ன் சார்புகளானால்,

$\lim_{x\to a} (u \pm v) = \lim_{x\to a} u \pm \lim_{x\to a} v$ எனப்பெறுகின்றோம்.

எவ்வாறெனில், $\lim u = P$-ம், $\lim v = q$-ம் ஆனால்,

$u = P + \alpha$-ம்; $v = q + \beta$-ம் ஆகும். இங்கு α-ம் β-ம் பூச்சியத்தை நோக்கிப் பெயர்வனவாகும்.

$\therefore \quad u \pm v = (P + \alpha) \pm (q + \beta) = (P \pm q) + (\alpha \pm \beta)$
α, $\beta \to 0$ ஆகும்பொழுது, $u \pm v \to P \pm q$ ஆகும்.

இதுபோலவே, குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையான சார்புகளுக்கெல்லாம் கண்டறியலாம்.

ஆகவே, குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுள்ள இயற்கணிதக் கூட்டுச் சார்புகளின் எல்லை மதிப்பானது, அவற்றின் எல்லை மதிப்புகளின் இயற்கணிதக் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமாகும்.

[பின்வரும் உதாரணம் விளக்கி நிற்கிறபடி, இத் தேற்றமானது வரையறைப்படாத பரிமாணங்களுக்கும் உண்மையாக வேண்டுமென்பது அவசியமில்லை.

இதனை நோக்குக :

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n_2} + \frac{2}{n_2} + \frac{3}{n_2} + \dots \frac{n}{n_2} \right)$$

ஒவ்வோருறுப்பினது எல்லை மதிப்பும் n ஆனது கந்தழியை யணுகுங்கால் பூச்சியமாகும். எல்லை மதிப்புகளின் கூட்டுப்பலன் 0 ஆதல் வேண்டும். ஆனுல் தொடரின் கூட்டுப்பலன்,

$$= \frac{1}{n^2} \Sigma n = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \text{ஆகும்.}$$

எனவே, $x \to \infty$ ஆகுங்கால், இக்கூட்டுப்பலனின் மதிப்பு வரம்பு $\frac{1}{2}$ ஆகும்.]

இதையொப்ப மதிப்பு எல்லைகள் மேற்றுகிய பின்வரும் தேற்றங்கள் நிரூபிக்கப்படும் :

(iii) $\lim_{x \to a} (u. v) = \lim_{x \to a} u \lim_{x \to a} v$

அதாவது, குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுள்ள சார்புகளின் பெருக்கற்பலனது எல்லை மதிப்பானது அவற்றின் எல்லை மதிப்புகளின் பெருக்கற்பலனுக்குச் சமமாகுமெனப் பெறலாகும்.

கிளை (i): C என்பது மாறிலி (Constant) நிலையெண் ஆனுல், $\lim_{x \to a} (Cu) = C \lim_{x \to a} u$ ஆகும்.

கிளை (ii): $\lim_{x \to a} (C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots \dots)$

$$= C_1 \lim_{x \to a} u_1 + C_2 \lim_{x \to a} u_2 + \dots \dots \text{ ஆகும்.}$$

(C_1 C_2 முதலியன மாறிலி நிலையெண்களாகவின்)

கிளை (iii): $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$; $\lim_{x \to a} x^3 = a^3$ முதலாயின.

கிளை (iv): $\lim_{x \to a} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{\lim_{x \to a} u}{\lim_{x \to a} v}$ $\left[\lim_{x \to a} v \neq 0 \text{ எனின்} \right]$

அதாவது பகுதியின் எல்லை மதிப்புப் பூச்சியம் ஆகாத வழி, இரண்டு சார்புகளின் ஈவினது மதிப்பெல்லை, அவற்றின் எல்லை மதிப்புகளின் ஈவுக்குச் சமமாகும்.

கிளை 1 : $\lim_{x \to a} \left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{\lim_{x \to a} v}$ $\left[\lim_{x \to a} v \neq 0 \text{ எனின்}\right]$

கிளை 2 : $\lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$; $\lim_{x \to a} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2}$ ...

... ($a \neq 0$ எனின்)

1.10. இப்பிரிவில் நாம் முக்கியமான மூன்று நியம மதிப்பெல்லைகளைக் (Standard limits) கருதுவோம்.

நியம மதிப்பெல்லை-I

n, மிகை முழுவெண் ஆகியவழி $\frac{x^n - a^n}{x-a} = n.a^{n-1}$ என நிருபித்தல்.

$x = a$ ஆகும்பொழுது, சார்பானது $\frac{0}{0}$ என்னும் வடிவைப் பெறும். மேலும், $x \to a$ ஆகும்பொழுது பகுதி, தொகுதியென்றும் இரண்டும் 0-ஐ நோக்கி நெருங்கும் இயல்புடையவாகும். ஆகவே, பகுதி 1.9-ல் கண்ட தேற்றம் (iv) ஆனது எவ்விதச் செய்தியையும் கொடுப்பதாகவில்லை.

a நீங்க ஏனைய மதிப்புகளை x பெறுமிடத்து, கொடுத்த கோவை அடையும் மதிப்பைச் சார்ந்து அதன் மதிப்பெல்லையுள்ளதாகும். அப்பொழுது $(x - a)$ பூச்சியமாகாமையால், அதனுல் வகுத்தலைச் செய்யலாம்.

n ஆனது குண முழு எண் ஆனுல், வகுத்தலினுலே,

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + x^{n-4}a^3 + \ldots\ldots + a^{n-1}.$$

எனக்கிடைக்கும்.

$(x - a)$ என்பது எவ்வளவு சிறியதாயினும், பூச்சியமாக மட்டும் இல்லாதபொழுது இவ்வகுத்தல் ஏற்பதாகும்.

$$\therefore \lim_{x \to a} \frac{x^n - a_n}{x - a} = \lim_{x \to a} (x^{n-1} + x^{n-2} a + \dots\dots + a^{n-1})$$

$$= \lim_{x \to a} x^{n-1} + \lim_{x \to a} x^{n-2} a + \lim_{x \to a} x^{n-3} a^2 + \dots\dots \lim_{x \to a} a^{n-}$$

[பகுதி 1.9 தேற்றம் (ii)-ன் படி]

இப்பொழுது $x \to a$ ஆக, $x^{n-1} \to a^{n-1}$; $x^{n-2} \to a^{n-2}$ ...... முதலானவையாம். வலப்பக்கத்தில் n உறுப்புகள் உள. ஒவ்வொன்றும் $n \to a$ ஆகுங்கால் n என்பது a^{n-1} ஆகும்.

$$\therefore \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n.\ a^{n-1} \text{ ஆகும்.}$$

[குறிப்பு : இத்தேற்றமானது n மிகை முழுவெண்ணுகுங்கால் நிருபிக்கப்பட்டாலும், மற்ற விகிதமுழுவெண்களாகுங்காலத்தும் பொருந்துவதாகும்.]

மறுவழி :

$x = a + h$ ஆகட்டும். அதனுல் $x \to a$ ஆகுமிடத்து $h \to 0$ ஆகும். $x \neq a$ ஆதலின் h எப்பொழுதும் 0 ஆவதில்லை.

$$\therefore \lim_{h \to 0} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{(a + h)^n - a^n}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(a^n + nc_1 a^{n-1} h + nc_2 a^{n-2} h^2 + \dots + h^n) - a^n}{h}$$

(ஈருறுப்புத் தேற்றப்படி $(a + h)^n$ ஐ விரிவாக்க வரும்)

$$= \lim_{h \to 0} \frac{nc_1 a^{n-1} h + nc_2 a^{n-2} h^2 + \dots + h^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} nc_1 a^{n-1} + nc_2 a^{n-2} h + \dots\dots h^{n-1}$$

(பூச்சியமாகாத h ஆல் வகுக்க.

$= nc_1 a^{n-1}$ (h அடங்கிய மற்ற உறுப்புகள் $h \to 0$ ஆகும் பொழுது, தாமும் பூச்சியத்தை நெருங்குதலால்.)

$= n a^{n-1}$

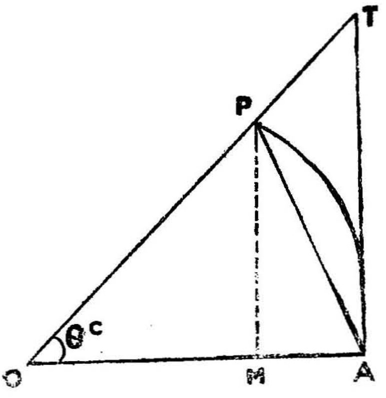
இனி : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(a+h)^n - a^n}{h} = n\,a^{n-1}$

நியம மதிப்பெல்லை-II

θ என்பது ஆரையன்களால் அளவுபடும் பொழுது

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \text{ ஆகும்.}$$

AOP என்பது θ^c அளவுள்ள குறுங்கோணமாகட்டும். *O* ஐ மையமாகக் கொண்டு ஏதேனும் வசதியான ஆரமுடையதொரு வட்டவில்லை கோணத்தின் கரங்களை *A*, *P* என்னுமிடங்களில் வெட்டுவதாகக் கொள்க.



படம் 1.

*AP*ஐச் சேர்க்க. இவ்வட்டத்திற்கு *A* என்னுமிடத்தில் நாட்டுந் தொடுகோடானது *OP*ஐ *T* என்னுமிடத்தில் சந்திப்பதாகுக. இப்பொழுது,

$\triangle\, OAT >$ ஆரைச்சிறை $> \triangle\, OAP$ என்பது வெளிப்படையாக விளங்கும்.

அதாவது, $\frac{1}{2}\, OA.AT > \frac{1}{2}\, OA^2.\ \theta > \frac{1}{2}\, OA.MP$

முற்றிலும் $\frac{1}{2}\, OA^2$ ஆல் வகுக்க,

$\dfrac{AT}{OA} > \theta > \dfrac{MP}{OP}$ எனக் கிடைக்கும்.

அதாவது $\tan\theta > \theta > \sin\theta$

மிகைப் பரிமாணமாகிய $\sin\theta$ ஆல் வகுக்க. (θ குறுங்கோணமாதலின்)

$$\frac{1}{\cos\theta} > \frac{\theta}{\sin\theta} > 1 \text{ எனப் பெறுகின்றோம்.}$$

$$\therefore \quad \cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1 \text{ (தலைகீழாக்க)}$$

அதாவது, θ ஆனது குறுங்கோணமாகி ஆரையன்களால் அளவெய்துமாயின், $\sin\theta$ ஆனது $\cos\theta$-க்கும் 1-க்கும் இடைப்பட்டு நிற்கும்.

இப்பொழுது $\theta \to 0$ ஆகட்டும். $\theta \to 0$ ஆக, $\cos \to 1$ ஆகும்.

இந்நிலையில் $\cos\theta$-க்கும் 1-க்கும் இடைப்பட்டு நிற்கும் $\frac{\sin\theta}{\theta}$ன் மதிப்பும் 1 ஐ நெருங்குவதாகும் [பகுதி 1.9 (1)].

$$\therefore \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \text{ (}\theta\text{ ஆரையன்களாக அளவு பெறுமிடத்து.}$$

குறிப்பு 1: குறை இராசிப் பக்கத்திலிருந்துகூட $\theta \to 0$ ஆகும் வழி மேற்கண்ட பலன் உண்மையாகும்.

குறிப்பு 2: $\frac{\sin\theta}{\theta} \to 1$ (கீழிருந்து)

குறிப்பு 3: $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{\pi}{180}$ (θ பாகைகளால் குறிக்கப்படின்)

ஏனெனில், $$\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{\sin\frac{\pi\theta^c}{180}}{\theta} = \frac{\sin\frac{\pi\theta^c}{180}}{\frac{\pi}{180}\theta} \times \frac{\pi}{180}$$

$\theta \to 0$ ஆகும்பொழுது $\frac{\pi\theta}{180} \to 0$ ஆகும்.

$$\therefore \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta^\circ}{\theta} = \lim_{\frac{\pi\theta}{180} \to 0} \text{ வலப்பக்கத்தின் } = 1 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180}$$

நியம மதிப்பெல்லை-III

θ ஆனது ஆரையன்களால் அளவு குறிக்கப்படின்,

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan \theta}{\theta} = 1 \text{ என நிருபித்தல்.}$$

மேற்கண்ட தேற்றத்தில், $\tan \theta > \theta > \sin \theta$ ஆதல் பெற்றோம். மிகைப் பரிமாணமாகிய $\tan \theta$ ஆல் வகுக்க (θ குறுங்கோணமாதலின்),

$$1 > \frac{\theta}{\tan \theta} > \cos \theta \text{ எனப் பெறுகின்றோம்.}$$

தலைகீழ்ப்படுத்த $1 < \dfrac{\tan \theta}{\theta} < \dfrac{1}{\cos \theta}$ எனப் பெறுகின்றோம்.

$\theta \to 0$ ஆக, $\dfrac{1}{\cos \theta} \to 1$ ஆகும்.

ஆகவே, 1-க்கும் $\dfrac{1}{\cos \theta}$-க்கும் இடைப்பட்டிருக்கும் $\dfrac{\tan \theta}{\theta}$-ம் $\to 1$ ஆகும்.

$$\therefore \lim_{\theta \to 0} \frac{\tan \theta}{\theta} = 1 \text{ (}\theta\text{ ஆரையன்களால் அளவெய்தலின்)}$$

குறிப்பு 1 : மேற் குறிப்பிட்டபடி $\dfrac{\tan \theta}{\theta} \to 1$ எனக்காண்கின்றோம்.

குறிப்பு 2 : $\displaystyle \lim_{\theta \to 0} \frac{\tan \theta^\circ}{\theta} = \frac{\pi}{180}$

குறிப்பு 3 : $\sin \theta$, $\tan \theta$ ஆகியவை, θ ஆனது மிகச் சிறிய மதிப்புகளைப் பெறுமிடத்து ஒவ்வொன்றும் தோராயமாக θ-க்குச் சமமாகும் (θ என்பது கொடுத்த கோணத்திலுள்ள ஆரையன்களின் எண்ணிக்கையாயிருத்தலின்).

பின்வரும் அட்டவணையை ஆராய்க :

கோணம் (பாகைகளில்)		4°	3°	2°	1°	0°
கோணம் (ஆரையன் களில்)	...	.0698	.0524	.0349	.0175	.0000
sine (நெடுக்கை)	...	.0698	.0523	.0349	.0175	.0000 $\frac{\sin\theta}{\theta}$ தேரப்படாதது
tan (இருக்கை)	...	.0699	.0524	.0349	.0175	.0000 $\frac{\tan\theta}{\theta}$ தேரப்படாதது

θ சிறியதாகுங்கால், $\theta = \sin\theta = \tan\theta$ ஆதலின்,

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \text{ ஆகும்} ; \quad \frac{\tan\theta}{\theta} = 1 \text{ ஆகும்.}$$

செய்து காட்டிய உதாரணங்கள்

1. $y = 3x + 2x^2$ ஆனல் $x \to 0$ ஆகும்பொழுது $y \to 0$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

x-ன் மதிப்பைத் தக்கபடி மிகச் சிறிய பரிமாணமாக்கினல், முற்பட எத்துணைச் சிறிய பரிமாணமாகவேனும் குறிக்கப்பட்ட தொன்று உண்டெனின், அதனினும் சிறியதாகுமாறு y ஐச் செய்யக் கூடுமெனக் காட்ட வேண்டும்.

எண்ணளவில் x ஆனது 1-க்குக் குறைந்திருக்குமானல், x^2-ன் மதிப்பு x-ன் மதிப்புக்கும் குறைந்திருக்கும். அதனல், $3x + 2x = 5x$-ன் மதிப்புக்கும் எண்ணளவில் குறைந்திருக்கும். ஆகவே, y ஆனது முன்னே கருதிக் கொண்ட t-க்கும் குறைந்திருக்க வேண்டுமானல், நிபந்தனையை நிறைவேற்றுவதற்காக x-ன் மதிப்பை எண்ணளவில் $\frac{t}{5}$-க்கும் குறைந்ததாக்க வேண்டும்.

ஆகவே, $x \to 0$ ஆக, $y \to 0$ ஆகும். இது $x = 0$ ஆகுங்கால், $y = 0$ ஆகும்படியன்று. எனினும், இவ்வகையில் மதிப்பு வரம்பென்பது சார்பின் மதிப்புகளுள் ஒன்றாகுமென்றும், அது

அடையத்தக்கதாமென்றும் காண்கிறோம். அதாவது $x \to 0$ ஆகுங்கால், சார்பானது தொடர்ச்சிநிலை பெற்றிருக்கும்.

2. $\underset{\theta \to 0}{\mathrm{lt}} \dfrac{1 - \cos\theta}{\theta}$ ஐக் கண்டறிக.

$$\underset{\theta \to 0}{\mathrm{lt}} \frac{1 - \cos\theta}{\theta} = \underset{\theta \to 0}{\mathrm{lt}} \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta}$$

$$= \underset{\theta \to 0}{\mathrm{lt}} \frac{2\sin\frac{\theta}{2} \cdot \sin\frac{\theta}{2}}{\theta}$$

$$= \underset{\theta \to 0}{\mathrm{lt}} \frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\frac{1}{2}\theta} \sin\frac{1}{2}\theta$$

$$= \underset{\frac{1}{2}\theta \to 0}{\mathrm{lt}} \frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\frac{1}{2}\theta} \sin\frac{1}{2}\theta$$

($\theta \to 0$ ஆயின், $\frac{1}{2}\theta \to 0$ ஆதலின்)

$$= 1 \times 0 = 0$$

[தேற்றம் (iii) பகுதி 1.9-ம், நியம மதிப்பு எல்லை III-ம்]

பயிற்சி 1·2

1. பின்வரும் எல்லை மதிப்புகளைக் கண்டறிக.

(i) $\underset{x \to \infty}{\mathrm{lt}} \dfrac{4n^2 + 3n - 5}{5n^3 - 2n + 7}$ (ii) $\underset{n \to \infty}{\mathrm{lt}} \dfrac{2x + 5}{3x - 4}$

இதற்கு மதிப்பு வரம்பு பெறக்கிடைக்குமா வெனச் சோதிக்க :

(iii) $\underset{n \to \infty}{\mathrm{lt}} \dfrac{\Sigma n^2}{n^3}$ (iv) $\underset{n \to \infty}{\mathrm{lt}} \dfrac{n^2 + 1}{n^2 - n}$

(v) $\underset{n \to \infty}{\mathrm{lt}} \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots \dfrac{1}{2^n}\right)$

S_n ஆனது 1க்கு $10^{-1000,000}$ குறைந்திருக்கும்படியாக n-க்குக் குறைந்த பட்ச மதிப்பைக் கண்டறிக. இவ்வரம்பு பெறக் கிடைத்ததா ?

(vi) $\underset{x \to \infty}{\text{lt}} \dfrac{ax^2+bx+c}{lx^2+mx+n}$.

மதிப்பு வரம்பு பெற வாய்த்ததாவெனச் சோதிக்க. $l=0$ ஆனல் அம்மதிப்பெல்லை யாது ?

2. கீழ்க்கண்டவற்றிற்கு மதிப்பெல்லைகளை அறிக :

(i) $\underset{x \to 0}{\text{lt}} \dfrac{5x+2}{4x+3}$. மதிப்பெல்லை வாய்த்ததா ?

(ii) $\underset{x \to 0}{\text{lt}} \dfrac{px^2+qx+r}{lx^2+mn+n}$.

பின்வரும் சந்தர்ப்பங்களில் (வகைகளில்) வரம்பெய்தும் மதிப்புகளைக் காண்க :

(a) r-ம் n-ம் $\neq 0$. (b) $n \neq 0$; $r = 0$.

(c) $n = 0$; $r \neq 0$. (d) n-ம், r-ம் $= 0$.

இறுதியில் கூறிய வகையில் மதிப்பெல்லையானது சார்புக்குரியதாகியதொரு மதிப்பாகாமையைக் காண்க.

(iii) $\underset{x \to 0}{\text{lt}} \dfrac{ax^2+bx+c}{lx+m}$ (iv) $\underset{x \to 0}{\text{lt}} \dfrac{x}{x^2+3}$

(v) $\underset{x \to 0}{\text{lt}} \dfrac{x+4}{2x^2+3x}$

3. மதிப்பிடுக: (i) $\underset{x \to 2}{\text{lt}} \dfrac{3x-7}{2x+5}$, (ii) $\underset{x \to 1}{\text{lt}} \dfrac{2x^2-3}{4x+3}$.

4. மதிப்பிடுக: (i) $\underset{x \to 3}{\text{lt}} \dfrac{x^5+243}{x^4-81}$

(ii) $\underset{x \to 0}{\text{lt}} \dfrac{(3+x)^2-9}{x}$ (iii) $\underset{x \to a}{\text{lt}} \dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$

(iv) $\underset{x \to 2}{\text{lt}} \dfrac{x+2}{x^3-10x-12}$.

5. பின்வரும் மதிப்பு வரம்புகளைக் காண்க :

(i) $\underset{y \to \infty}{\text{lt}} \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}-1}$, (ii) $\underset{x \to 0}{\text{lt}} \dfrac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

(iii) $\underset{x \to 0}{\text{lt}} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{x}$, (iv) $\underset{x \to \infty}{\text{lt}} (\sqrt{1+x}-\sqrt{x})$

6. கோணங்கள் ஆரையன்களால் அளவுபடுமிடத்துப் பின்வரும் மதிப்பு வரம்புகளைக் கண்டறிக :

(i) $\underset{\theta \to 0}{\text{lt}} \dfrac{\sin m\theta}{\theta}$ (ii) $\underset{\theta \to 0}{\text{lt}} \dfrac{\sin m\theta}{\sin n\theta}$

(iii) $\underset{\theta \to 0}{\text{lt}} \dfrac{\sin a\theta}{\tan b\theta}$ (iv) $\underset{x \to 0}{\text{lt}} \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$

(v) $\underset{x \to 0}{\text{lt}} \dfrac{1-\cos ax}{1-bx}$ (vi) $\underset{x \to 0}{\text{lt}} \dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$

(vii) $\underset{x \to 0}{\text{lt}} \dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$ (viii) $\underset{x \to 0}{\text{lt}} (\operatorname{cosec} x-\cot x)$

(ix) $\underset{x \to 0}{\text{lt}} \left(\sin^2 x+\dfrac{x^2}{1-\cos 4x}\right)$

(x) $\underset{\theta \to 0}{\text{lt}} \dfrac{\sin 5\theta-\sin 3\theta}{\sin 6\theta-\sin 2\theta}$

(xi) $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{lt}} (\sec x-\tan x)$

(xii) $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{lt}} \dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$

1 11. சார்புகளின் வரைபடங்கள் (Graphs of Functions)

ஒரு சார்பினது மாறுபாடு பற்றிய தன்மையை ஆராய்தலே நுண்கணிதத்தின் நோக்கமாகும். ஒரு சார்பினது முக்கியமான அம்சங்களை ஆராய்தற்கு ஒரு வழி வரைபட முறையாகும்.

$y = f(x)$ எனக்கொள்ளுவோம். தமது x, y என்னும் ஆயத்தொலைகள் கொடுத்த சமன்பாட்டுக்கு இயைபுறுமாறு கொண்டுள்ள புள்ளிகள் இயங்கும் வழியே சமன்பாட்டின் வளைகோடு அல்லது வரைபடம் எனப்படும். ஒரு சமன்பாட்டின் வரைபடத்தை இங்ஙனம் தோராயப்படுத்தலாம்.

x-க்குப் பல மதிப்புகளைக்கொடுத்து அவற்றிற்கு ஒப்பச் சமன்பாட்டின் வாயிலாக y-க்கு உரிய மதிப்புகளைப் பெறலாம். இங்ஙனம் x, y ஆகியவற்றிற்கு ஒன்றுக்கு ஒன்று ஒத்த மதிப்புளாகக் கிடைத்தவற்றைப் பதிவுசெய்து நிரல்பட இணைத்துப் பார்த்தால், கொடுத்த சமன்பாட்டிற்கு ஏற்றதாக நாம் பெறவேண்டிய வரைபடம் உருவாகும். இந்நிலையில், மதிப்புகளின் மாறுபாடு பற்றிய இடைவெளி தொடர்ச்சியுற்றிருந்தால், மாறியானது தான் பெறத்தக்கதாகிய பல்வேறு தகவுடைய மதிப்புகளின் எண்ணிக்கைக்கு யாதொரு வரம்புமிலதாகும். உண்மையான வரை படத்தில் சில புள்ளிகளே குறிப்பிடப்படுமாயினும் அதன்கண் இடம் பெறுதற்குரிய புள்ளிகள் அளவில் உளவாதலின், அவற்றின் யாதொரு வரம்புமில்லை. இங்ஙனம் பெறக்கிடக்கும் வளைகோடே ஏற்புடைய வரைபடமாகும். அவ் வரைபடத்தின்மேல் இடம்பெற்று நிற்கும் எப் புள்ளியினது x, y என்னும் ஆயத்தொலைகள் $f(x)$-ன் நியமத்திற்குப் பொருந்தி நிற்கும். அவ்வாறே, அவ் வரைபடம் உள்ள தளத்தில் கிடப்பதொரு புள்ளியினது ஆயத்தொலைகள் $f(x)$-ன் நியமத்திற்குப் பொருந்துவனவானால், அது அவ் வரைபடத்தில் தப்பாமல் இடம் பெறத்தக்கதாகுமெனவும் அறிகின்றோம்.

பயிற்சி 1·3

பின்வரும் சார்புகளுக்கு வரைபடங்களை வரைக :

(i) $y = 3 + 5x - 4x^2$ (ii) $y^2 = 4x$

(iii) $y^2 = 4(2 - x)$ (iv) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

(v) $y = \dfrac{1}{x}$ (vi) $y = \dfrac{1}{x^2}$

(vii) $y = \sin x$ (viii) $y = \cos x$

(ix) $y = \tan x$ (x) $4 \sin x - 3 \cos x$

(xi) $y = 5 \sin x + 12 \cos x$

(xii) $\cos x - \dfrac{1}{3} \sin 2x$

2. வகையிடல்

(Differentiation)

2·1 ஒரு சார்பினது மாறுவிதம் (Rate of change of a function)

1. மேலே அத்தியாயத்தில் சார்புகளைப் பற்றியறிந்தோம். சார்பற்ற மாறிகளுடைய குறிப்பிட்ட மதிப்புகளை யொட்டிச் சார்புகளை மதிப்பிடும் முயற்சியில் சில முக்கியமான மதிப்பெல்லைகளைக் கண்டறிய நேர்ந்தது. இவ்வத்தியாயத்தில் பிறிதொரு முக்கியமான விடயத்தைப் (concept) பற்றியறியப்புகுவோம். அதாவது, சார்பற்ற மாறியொன்று பெறுகின்ற யாதேனுமொரு மதிப்பையொட்டிச் சார்பானது மாறுபடும் விதத்தைக் காண்போம். மதிப்பெல்லையின் கருத்தைக்கொண்டு ஒரு சார்பினது மாறுவீதத்தை விவரணம் செய்வோம்.

2. நாம் சென்னையிலிருந்து 100 கல் தொலைவிலுள்ள விழுப்புரம் என்னும் ஊருக்கு இரயில் மார்க்கமாக 3 மணி நேரத்தில் பயணம் செய்து சாருவதாகக் கருதுவோம். அப்பொழுது சராசரி வேக வீதம் மணிக்கு $33\frac{1}{3}$ மைலாகுமெனச் சொல்லுகின்றோம். ஆனால், இரயில் வண்டியானது சில சமயங்களில் இச் சராசரி வேகத்திற்கு அதிகமாகவும், சில சமயம் குறைவாகவும், மற்றும் இடையிடையே நிலையங்களில் நின்றும் செல்லுவதனைக் காண்கின்றோம். ஆதலின் ஒரு கால இடைவெளியில் கருதப்படும் சராசரி வேகமென்பது கற்பனையெண்ணேயாகும். ஏனெனில், அது உண்மையோடு ஒத்திருக்கவில்லை. இதே நியாயமானது மாறுபடும் எந்த பரிமாணத்திற்கும் ஏற்புடையதேயாகும். ஒவ்வொரு வகையிலும் ஒரு சார்பற்ற மாறியின் யாதொரு மதிப்பினிடத்தும் ஒரு மாறும் பரிமாணத்தின் மாறு வீதமானது ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் கணித்தறிந்த சராசரி வேக வீதத்தைவிட உண்மையனுபவத்திற்கு ஒத்திருக்கக் கண்டறிந்தோம்.

3. குறிப்பிட்ட கணத்தில் வேகத்தைக் கணக்கிடுந் தன்மையைப் பின்வரும் உதாரணத்தால் விளக்குவோம் :

ஒரு பொருளானது ஓய்வு நிலையிலிருந்து விழுமானால் எறியுமிடத்திற்குக் கீழே அதன் தூரமானது $S = 16t^2$ என்னும் சூத்திரத்தால் கொடுக்கப்படுகின்றது. யாதேனுமொரு கணத்தில் அவ்விழு பொருளினுடைய வேகத்தை காண்க.

ஆரம்பத்திலிருந்து ஏதேனுமொரு நேரத்தில் t அப்பொருளானது S ஆழத்திலிருந்தால், அப்பொழுது $S = 16t^2$ ஆகும். (1)

h மிகச் சிறிய பரிமாணம் ஆகுமிடத்து, $(t+h)$ நேரத்தில் R ஆனது $(S+K)$-க்கு அதிகரித்திருந்தால், அப்பொழுது K ஆனது h என்னும் மிகக் குறுகிய காலத்தில் அப்பொருளானது விழுந்த மிகச்சிறிய தூரத்தை யுணர்த்தும். இதனால் $\frac{K}{h}$ என்பது அக் குறுகிய கால இடைவெளியில் நிகழ்ந்த சராசரி வேகமாகும். இதனோடு $(s+k) = 26\,(t+h)^2$ ஆகும். (2)

கழித்தல் முறையால் $K = 16\,[(t+h)^2 - t^2] = 16\,(2th + h^2)$ ஆகும்.

$\therefore$ t-லிருந்து $t+h$ நேரம் அளவும் கழிந்த மிகக் குறுகிய கால இடைவெளியில் சராசரி வேகமானது

$$\frac{K}{h} = \frac{16(2th+h^2)}{h} = 32t + 16h \text{ ஆகும்.}$$

இது t கணத்தில் நிகழ்ந்த வேகத்தை, அரைகுறை அளவாக இருப்பினும், ஒருவாறு குறிப்பிடுவதாகக் கொள்ளலாம். ஆனால், இச்சிறிய கால இடைவெளியிலும் இயக்கமானது மாறிக்கொண்டேயிருக்கும்; ஆதலின், இதனினும் சிறிய கால இடைவெளியையெடுத்துக் கொள்ளுதலால், சிறந்ததொரு முடிபு பெறக்கூடும். உண்மையில், சராசரி வேகம் கணக்கிடப்பட்ட இடைவெளி இன்னும் சிறியதாகுமானால், நாம் பெறும் முடிவானது அக் கணத்தில் நிகழ்ந்த உண்மை வேகத்தை மிக அணுக்கமாக அறிவிப்பதாகும். ஆகவே, மிகவும் சரியான முடிபைப் பெறுவதற்குக் கொடுத்த t என்னும் கணத்தில் தொடங்கி h என்னும் சிறிய கால இடைவெளியில் கணக்கிட்ட சராசரி வேகமானது h என்னும் கால இடைவெளி பூச்சியத்தை நெருங்கும் நிலைமைக்கண் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பெல்லையைச் சாருகிறதா என்று பார்க்கவேண்டும்.

இவ்வாருக, h இடைவெளியைக் குறிப்பட்ட கணநேரத்தைக் குறுகும்படி குறைக்கவே, சராசரி வேகமானது அக் கணத்தில் நிகழும் வேகமாகின்றது.

∴ புறப்பட்டதிலிருந்து t செகண்டு நேரத்தில் வேகம்

$$= \lim_{h \to 0} \frac{t}{h} = 32\,t \text{ ஆகும்.}$$

($h \to 0$ ஆகுமிடத்து, உறுப்பு $16\,h \to 0$ ஆதலின்)

உதாரணம் 2 : xஐச் சார்த்தி, x^2-ன் மாறு வீதத்தை x-ன் யாதேனுமொரு மதிப்பினிடத்துக் கண்டறிக.

$y = x^2$ ஆகட்டும். h என்பது மிகச் சிறிய பரிமாணமாகக் கொண்டு x-ன் மதிப்பு $(x+h)$-க்கு அதிகரித்ததாகட்டும். அதற்குத் தக y-ன் மதிப்பு $(y+K)$-க்கு அதிகரித்ததென்க. அப்பொழுது $(y+K) = (x+h)^2$ ஆகும்.

$$\therefore \quad K = (x+h)^2 - x^2 = 2x\,h + h^2$$

$$\therefore \quad \frac{K}{h} = 2x + h \text{ (சமீபமாக)}$$

($\frac{K}{h}$ என்னும் விகிதமானது x^2-ம், x-ம் மாறுபடும் வீதத்தை ஒப்பிட்டுக் காட்டுவதாகும்.)

இப்பொழுது, x உடன் ஒப்பிடுங்கால், h ஆனது முற்றிலும் முக்கியமற்ற மிகச் சிறிய பரிமாணமாளுல், $\frac{h}{K}$ என்னும் விகிதம் நாம் விரும்புமளவுக்கு $2x$ஐ அணுகுவதாகும். இதனுல் $h \to 0$ ஆகும்பொழுது, நாம் தோராயமான மதிப்பைப் பெறுவதிலிருந்து சரியான முடிபையடையச் செல்லுகின்றவராவோம்.

$$\therefore \quad \lim_{h \to 0} \frac{K}{h} = 2\,x.$$

மேற்கண்ட உதாரணங்கள், xஐச் சார்ந்தமட்டில் $y = f(x)$ என்னும் சார்பினது சரியான மாறுவீதத்தைக் கண்டறிவதில் கையாளும் பொதுவான பிரச்சினையின் குறிப்பிட்ட சிறப்பான வகைகளாகும்.

5. நுண்கணிதத்தில் ஒரு சார்பினது மாறுவீதம் பற்றிய கருத்தானது அடிப்படை முக்கியத்துவம் பெற்றிருப்பதால், நாம்

அதற்கு ஒரு பெயரைக் கொடுத்து, அதைப் பெறுதற்குரிய செய் முறையைப் பொதுப்படையான சொற்களால் விளம்புவோமாக. அதே சமயத்தில் இக்காரியத்திற்காகப் பயன்படுத்தப்படும் சிறப்பான குறியீட்டு முறைகளையும் விளக்குவோமாக.

2.2. குறையீட்டு முறை (Notation)

y ஆனது x-ன் சார்பாகட்டும். x-ல் உண்டாகும் மாறுபாடு y-யிலும் ஏற்படும். ஒவ்வொரு மாறியிலும் ஏற்படும் சிறிய மாறு பாட்டை அதிகரிப்பு (increment) என்று வழங்குவோம். x-ல் மிகை யெண்ணுகவோ, குறையெண்ணுகவோ ஏற்படும் அதிகரிப்பை δx அல்லது Δx அல்லது h என்று குறிப்பிடப்படும். அதையொட்டி y-ல் ஏற்படும் அதிகரிப்பானது δy அல்லது Δy அல்லது K என முறையே குறிப்படப்படும்.

[குறிப்பு : δx எனின், $\delta \times x$ எனப் பொருள்படாது. அது x-ல் கண்ட மாறுபாடு என்றே குறிப்பிக்குமொரு சொல்லாகும்.] மதிப்பெல்லையைப் (limit) பயன் கொண்டு, ஒரு சார்பினது மாறு வீதத்தை விவரணம் செய்வோமாக.]

2.3. வகையீட்டுக் குணகம் (Differential coefficient)

$y = f(x)$ என்பது x-ன் தொடர்ச்சியான சார்பு ஆகட்டும். x ஆனது δx என்னும் சிறிய அதிகரிப்பைப் பெறுமிடத்து, அதற்குத்தக y பெறும் அதிகரிப்பு δy ஆகட்டும்.

அப்பொழுது $\delta y = f(x+\delta x) - f(x)$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{\delta y}{dx} = \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} \text{ ஆகும்.}$$

இவ்விகிதம், x-லிருந்து $x+\delta x$ வரையிலுள்ள இடைவெளியில் சார்பானது பெறும் சராசரி மாற்றத்தைக் குறிப்பிடுவதாகும்.

$\delta x \to 0$ ஆகும்பொழுது இவ்விதிதம் அடையும் எல்லை மதிப்பைக் காண விரும்புகின்றோம்.

[குறிப்பு: நாம் $\delta x = 0$ என்று இடுவதில்லை. ஏனெனின், அப்பொழுது $\delta y = 0$ ஆகும். அந்நிலையில் $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{0}{0}$ என நின்று தேரப்படாத தொன்றுகிவிடும்.]

இப்பொழுது, $\delta x \to 0$ ஆகுங்கால், விகிதத்தின் தொகுதியும் பூச்சியத்தை நோக்கிச் செல்லும் இயல்பினதாகும். ஆனால்,

இரண்டு மறைவுறும் பரிமாணங்களின் விகிதம் ஒரு குறிப்பிட்ட வரம்பை அடையும் இயல்பினதாதலைக் கண்டோம். இந்த வரம்பு, நிலையுள்ளதாயின், மாறியானது பெறும் யாதேனுமொரு x என்னும் மதிப்புள்ளவிடத்தில் சார்பானது அடையும். மாறுவீதத்தை விவரணம் செய்வதாகும். இவ்வரம்பானது வகையீட்டுக் குணகம் அல்லது வகைக்கெழு (derivative) அல்லது x-ஐப் பொறுத்த வழிச் சமன்பாடு (Derived function) எனப்படும். இதனை $\frac{dy}{dx}$ என்னும் குறியீட்டால் அமைக்கின்றோம்.

$$\text{குறியீடாக, } \frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\text{lt}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{lt}} \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$$

விவரணம் : வகையீட்டுக் குணகத்தைப் பெறும் செய்முறையானது வகையிடல் (differentiation) எனப்படும். நாம் $f(x)$ ஐ xஐச் சார்த்தி வகையீடு செய்வதாகச் சொல்லுகிறோம்.

x ஐப் பொறுத்த y-யினது வகையீட்டுக் குணகமானது கீழ்க்கண்டவாறு வேறு வடிவங்களிலும் எழுதப்படும் :

$$\frac{dy}{dx} = \underset{h \to 0}{\text{lt}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{\text{lt}} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{lt}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

பிற வடிவக் குறிப்புகளாவன : $\frac{d}{dx} y$; Dy; $D_x y$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{df}{dx}$, $f'(x)$, y', y என்பனவாம்.

2.4. நியமச் சார்புகளின் வகையீடு (Differentiation of Standard forms)

(i) x^n-ன் வகைகெழு (n மிகையெண்ணுகும்).

$y = x^n$ ஆகட்டும்.

x ஆனது δx ஏற்றம்பெற, அதற்கு ஏற்ப y ஆனது δy ஏற்றம் பெறுவதாகுக. அப்பொழுது, $y + \delta y = (x + \delta x)^n$ ஆகும்.

$$\therefore \ \delta y \ (x + \delta x)^n - x^n$$

$$\therefore \ \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{(x+\delta x)^n - x^n}{\delta x} = \frac{(x+\delta x)^n - x^n}{(x+\delta x) - x}$$

$$\therefore \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{(x+\delta x)^n - x^n}{(x+\delta x) - x}$$

$$= \lim_{(x+\delta x) \to x} \frac{(x+\delta x)^n - x^n}{(x+\delta x) - x}$$

$$= n\, x^{n-1}$$ (நியம வரம்பு I பகுதி 1.10)

$$\therefore \frac{dy}{dx} \text{ ie } \frac{d}{dx}(x^n) = n\, x^{n-1}$$

மறுவழி : $\delta y = (x+\delta x)^n - x^n$

$$= \{ x^n + nC_1\, x^{n-1} (\delta x) + nC_2\, x^{n-2} (\delta x)^2 + \dots + (\delta x)^n \} - x^n$$

(ஈருறுப்புக்கோவை முறையால் விவரிக்க)

$$= nC_1\, x^{n-1} (\delta x) + nC_2\, x^{n-2} (\delta x)^2 + \dots + (\delta x)^n$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = nC_1\, x^{n-1} + nC_2\, x^{n-2} (\delta x) + \dots (\delta x)^{n-1}$$

$$\therefore \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = nC_1\, x^{n-1}$$ ($\because$ மற்ற உறுப்புகள் 0 ஆதலின்)

அதாவது, $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

$\therefore$ $y = x^n$ ஆனுல், $\frac{dy}{dx} = n.\, x^{n-1}$ ஆகும்.

குறிப்பு 1 : நாம் இங்கு நிரூபணம் செய்யாவிட்டாலும், இச் சூத்திரமானது n-ன் எல்லா விகிதமுற மதிப்புகளுக்கும் மெய்ம்மை யாவதாகும்.

குறிப்பு 2 : $x^4, x^3, x^2, x, x^0, x^{-1}, x^{-2}$ ...... ஆகியவற்றின் வகையீட்டுக் குணகம் அல்லது வகைக்கெழு முறையே

$$4x^3,\ 3x^2,\ 2x,\ 1,\ 0,\ -\frac{1}{x^2},\ -\frac{2}{x^3}$$ ஆகும்.

(இவற்றின் அடுக்குத் தொடரில் $\frac{1}{x}$ தோன்ருமை நோக்குக.)

(ii) x ஆனது ஆரையன்களால் அளவெய்துவதாயின், x ஐப் பொறுத்து $\sin x$-ன் வகைகெழுவைக் காண்க

$y = \sin x$ ஆகட்டும். x ஆனது δx ஏற்றங்கொள்ள, அதற்கு ஏற்ப y ஆனது δy கொள்வதாகட்டும்.

அப்பொழுது $y + \delta y = \sin(x + \delta x)$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \delta y = \sin(x + \delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{1}{2}\delta x\right)\sin\left(\frac{1}{2}\delta x\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{2\cos\left(x + \frac{1}{2}\delta x\right)\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\delta x\right)}{\delta x}$$

$$= \cos\left(x + \frac{1}{2}\delta x\right)\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\delta x}{\frac{1}{2}\delta x}$$

$$\therefore \quad \underset{\delta x \to 0}{\text{lt}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{lt}}\left[\cos\left(x + \frac{1}{2}\delta x\right)\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}\delta x}{\frac{1}{2}\delta x}\right\}\right]$$

$$= \underset{\delta x \to 0}{\text{lt}} \cos\left(x + \frac{1}{2}\delta x\right)\cdot \underset{\delta x \to 0}{\text{lt}}\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}\delta x}{\frac{1}{2}\delta x}\right\}$$

[பகுதி 1.9 (iii) காண்க.]

$$= \underset{\delta x \to 0}{\text{lt}} \cos\left(x + \frac{1}{2}\delta x\right)\cdot \underset{\frac{1}{2}\delta x \to 0}{\text{lt}}\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}\delta x}{\frac{1}{2}\delta x}\right\}$$

$$\left[\because\ \delta x \to 0,\ \frac{1}{2}\delta x \to 0\right]$$

$= \cos x$ [நியம வரம்பு II, 1.10]

அதாவது, $\frac{dy}{dx} = \cos x$; அதாவது, $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$.

$\therefore$ $y = \sin x$ ஆனல், x ஆரையன்களால் அளவெய்தும் பொழுது,

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \text{ ஆகும்.}$$

(iii) xஐச் சார்த்தி Cos x-ன் வகைகெழுவைக் காண்க

$y = \cos x$ ஆகட்டும்.

x-க்கு ஏற்றம் δx உண்டானபொழுது, அதற்கேற்ப y-க்கு ஏற்றம் δy உண்டாயிற்றெனக் கொள்வோம்.

அப்பொழுது $y + \delta y = \cos(x + \delta x)$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \delta y = \cos(x + \delta x) - \cos x = -2\sin\left(x + \frac{1}{2}\delta x\right) \sin\frac{1}{2}\delta x$$

$$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{-2\sin\left(x + \frac{1}{2}\delta x\right)\sin\frac{1}{2}\delta x}{\delta x}$$

$$= -\sin\left(x + \frac{1}{2}\delta x\right)\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}\delta x}{\frac{1}{2}\delta x}\right\}$$

$$\therefore \quad \underset{\delta x \to 0}{\text{lt}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{lt}} \left[-\sin\left(x + \frac{1}{2}\delta x\right)\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}\delta x}{\frac{1}{2}\delta x}\right\}\right]$$

$$= \underset{\delta x \to 0}{\text{lt}} - \sin\left(x + \frac{1}{2}\delta x\right) \cdot \underset{x \to 0}{\text{lt}} \frac{\sin \frac{1}{2}\delta x}{\frac{1}{2}\delta x}$$

[பகுதி 1.9 (iii)]

$$= \underset{\delta x \to 0}{\text{lt}} - \sin\left(x + \frac{1}{2}\delta x\right) \cdot$$

$$\underset{\frac{1}{2}\delta x \to 0}{\text{lt}} \frac{\sin \frac{1}{2}\delta x}{\frac{1}{2}\delta x}$$

[$\delta x \to 0$ ஆனல், $\frac{1}{2}\delta x \to 0$ ஆதலின்]

$= = \sin x \cdot 1$ [நியம வரம்பு II, பகுதி 1.10]

அதாவது, $\frac{dy}{dx} = -\sin x$; அதாவது $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$.

$\therefore \quad y = \cos x$ ஆனல் $\frac{dy}{dx} = -\sin x$ (x-ஆரையன்களால் மதிப்பிடப்படின்)

[குறிப்பு: $\frac{dy}{dx}$ ஐக் கண்டறியும் செய்முறையில் மாணவர்கள் பின்வரும் படி முறைகளைக் கவனித்திருக்கலாம்:

(i) x ஆனது சிறிய ஏற்றமாகிய δx ஐப் பெற வைத்தல்.

(ii) அதற்கு ஒப்ப y-ல் விளையும் ஏற்றமாகிய δyஐப் பெறுதல்.

(iii) δx-க்கு δyஐ விகிதப்படுத்திக் கூடுமானல் அதனைச் சுருக்கிக் கொள்ளுதல்.

(iv) $\delta x \to 0$ ஆகும்பொழுது $\frac{\delta y}{\delta x}$-ன் வரம்பை மதிப்பிடுதல்.

மேற்கூறிய முறையால் ஒரு சார்பின் வகையீட்டுக் குணகத்தைப் (differential coefficient) பெறுதலை 'ஆரம்பத் தத்துவத்தி

லிருந்து வகைக் கெழுப்பேறு' (differentiation from first principles) என்றறியப்படும். இஃதை 'ஆதிமுறைப்படி காணும் வகைகெழு' என்றும் சொல்லலாம்.]

விளக்க உதாரணம் : ஆரம்பத் தத்துவத்திலிருந்து x ஐ யொட்டி $\sqrt{x}$-ன் வகையீட்டுக் குணகத்தைக் காண்க.

$y = \sqrt{x}$ ஆகட்டும்.

$x + \delta x$ என்பது x-ன் ஏற்றமுற்ற அல்லது ஏறிய மதிப்பாகட்டும். அதற்கேற்ப $y + \delta y$ என்பது y-ன் ஏறிய மதிப்பாகட்டும்.

அப்பொழுது $y + \delta y = \sqrt{x + \delta x}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \delta y = \sqrt{x + \delta x} - \sqrt{x} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\sqrt{x + \delta x} - \sqrt{x}}{\delta x}$$

$$\therefore \quad \underset{\delta x \to 0}{\text{lt}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{lt}} \frac{\sqrt{x + \delta x} - \sqrt{x}}{\delta x}$$

இனி, $\dfrac{\sqrt{x + \delta x} - \sqrt{x}}{\delta x}$

$$= \frac{(\sqrt{x + \delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \delta x} + \sqrt{x})}{\delta x(\sqrt{x + \delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{(x + \delta x) - x}{\delta x(\sqrt{x + \delta x} + \sqrt{x})} = \frac{\delta x}{\delta x(\sqrt{x + \delta x} - \sqrt{x})}$$

$$\therefore \quad \underset{\delta x \to 0}{\text{lt}} \frac{\delta y}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\text{lt}} \frac{\delta x}{\delta x(\sqrt{x + \delta x} - \sqrt{x}}$$

$$= \underset{\delta x \to 0}{\text{lt}} \frac{1}{(\sqrt{x + \delta x} - \sqrt{x}}$$

($\delta x \neq 0$ ஐ நீக்க)

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

பயிற்சிக்குரிய உதாரணங்கள்

(1) $\frac{1}{x}$; (2) $\frac{3}{x^2}$; (3) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; (4) $x^2 - 3x + 4$;

(5) $\frac{3}{2x-7}$; (6) $\tan x$; (7) $\operatorname{cosec} x$; (8) $\sec x$; (9) $\cot x$,

— x ஐ யொட்டியமைந்த இக் கோவைகளின் வகையீட்டுக் குணகங்களைக் கண்டறிக.

ஆரம்பத் தத்துவத்திலிருந்து பின்வருவனவற்றை நிரூபிக்க :

(1) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

(2) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$

(3) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

(4) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

[குறிப்பு : சார்புகளின் வகையீட்டுக் குணகங்கள் ஆரம்பத் தத்துவங்களிலிருந்து பெறப்படுவதைவிட வெகு சுலபமாகவும், விரைவாகவும் பகுதி 2·4-ல் கூறிய நியமப்பலன்களையும் (Standard results), பின்வரும் பொதுத் தேற்றங்களையும் பயன் படுத்தலால் கிடைக்கப்பெறும்.]

உதாரணமாக,

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(x^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\, x^{\frac{1}{2}-1}$$ (x^n-க்கு உரிய வகைகெழுவைப் பெறுவதற்கு ஓதிய சூத்திரத்திலிருந்து)

$$= \frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2.5. வகையிடுபற்றிய பொதுத் தேற்றங்கள் (General theorems on differentiation)

தேற்றம் I: ஒரு மாறிலியின் வகைகெழு (derivative) பூச்சியமாகும்.

$y = C$ என்க. C என்பது x உடன் சார்பின்றி நிற்கும் ஒரு நிலையான பரிமாணமாகும். x-ன் மதிப்பில் உண்டாகும் யாதொரு மாற்றமும் y-ன் மதிப்பைப் பாதிக்காது; ஏனெனில் y ஆனது x உடன் சார்பற்று நிற்றலின் என்க.

$\therefore$ x-ல் நேரும் δx என்னும் எவ்வித ஏற்றத்திற்கும் ஏற்ப $\delta y = 0$ ஆகும்.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\text{lt}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{lt}} \frac{0}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{lt}} 0 = 0.$$

தேற்றம் II: xஐச் சார்த்தி x-ன் வகைகெழு **1** ஆகும்.

இது பகுதி 2.4 (i)-லிருந்து கிளையாக எளிதில் பெறத்தக்கதாகும். அல்லது தனிப்பட்ட முறையில் பின்வருமாறு நிரூபிக்கப் படவுங் கூடும் :

ஏனெனில் $y = x$ ஆனல், $\delta y = \delta x$.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\text{lt}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{lt}} \frac{\delta x}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{lt}} 1 = 1$$

ஆகவே, எந்த மாறிலின் வகைகெழுவும் அதைச் சுட்டியே அறியப்படுமிடத்து ஒன்றேயாகும்.

தேற்றம் III: வரையறைப்பட்ட எண்ணிக்கையான சார்புகளின் இயற்கணிதக் கூட்டுப் பலனின் வகைகெழு, சார்பின் வகைகெழுக்களின் இயற்கணிதக் கூட்டுப்பலனுக்குச் சமமாகும்.

$y = u \pm v$ என்க. u-ம் v-ம் x-ன் சார்புகளாகும். x-ல் நேரும் சிறிய ஏற்றத்திற்குத்தக u, v-க்களிலும், அவற்றின் விளைவாக y-யிலும் முறையே δu, δv, δy என்னும் ஏற்றங்கள் நேருவதாகக் கொள்ளுவோம்.

$$\therefore \delta y = \delta u \pm \delta v$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta u}{\delta x} \pm \frac{\delta v}{\delta x}$$

$$\therefore \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\delta u}{\delta x} \pm \frac{\delta v}{\delta x} \right)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta u}{\delta x} \pm \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta v}{\delta x}$$

[பகுதி 1.9 (ii)]

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$ ஆகும்.

இப்பலனை எத்தனை வரையறைப்பட்ட எண்ணிக்கையுடைய சார்புகளுக்கேனும் பயன்படுத்தலாம்.

ஆகவே $\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w \pm \ldots\ldots) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm \ldots$

தேற்றம் IV : C என்பது ஒரு மாறிலியாகவும், u என்பது x உடன் படுவதொரு சார்பாகவும் இருந்தால், Cu-ன் வகைக்கெழு $= C$ மடங்கு u-ன் வகைகெழுவாகும்.

$y = Cu$ என்க.

x-ஆனது $x + \delta x$-க்குப் பெருகுங்கால், u ஆனது $u + \delta u$-க்கு மாறியதாகட்டும். இதன் விளைவாக y ஆனது $y + \delta y$-க்குப் பெருகியதாகட்டும்.

$$\therefore \quad y + \delta y = C(u + \delta u)$$

$$\therefore \quad \delta y = C(u + \delta u) - Cu = C \cdot \delta u$$

$$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x} = C \cdot \frac{\delta u}{\delta x}$$

$$\therefore \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \left(C \cdot \frac{\delta u}{\delta x} \right)$$

$$= C \cdot \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta u}{\delta x}$$

[பகுதி 1.9 (iii)]

அதாவது, $\frac{dy}{dx} = C \cdot \frac{du}{dx}$

ஆகவே, $\frac{d}{dx}(Cu) = C \cdot \frac{du}{dx}$ ஆகும்.

தேற்றங்கள் III-ம் IV-ம் உடனடியாகப் பின்வரும் பொதுத் தேற்றங்களில் செலுத்தப்படவாகின்றன; $C_1, C_2, C_3, \ldots$ என்பன மாறிலிகளாகவும். $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots$ என்பன x உடன் படும் சார்புகளாகவும் இருந்தால்,

$$\frac{d}{dx}(C_1 u_1 \pm C_2 u_2 \pm C_3 u_3 \pm \ldots\ldots\ldots)$$

$$= C_1 \frac{du_1}{dx} \pm C_2 \frac{du_2}{dx} \pm C_3 \frac{du_3}{dx} \pm \ldots\ldots \text{ ஆகும்.}$$

விளக்க உதாரணங்கள்

$y = 3x^4 - 2x - 5 + \frac{1}{2}\cos x$ ஆனால், $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(3x^4 - 2x - 5 + \frac{1}{2}\cos x\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(3x^4) - \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d(5)}{dx} + \frac{d\left(\frac{1}{2}\cos x\right)}{dx}$$

$$= 3\frac{d}{dx}(x^4) - 2\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(5) + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= 3\cdot 4x^3 - 2 \times 1 - 0 + \frac{1}{2}(-\sin x).$$

$$= 12x^3 - 2 - \frac{1}{2}\sin x.$$

பயிற்சிக்குரிய மாதிரிகள்

x உடன் சார்த்திப் பின்வரும் கோவைகளுக்கு வகையீட்டுக் குணகங்களைக் காண்க :

(1) $5x^4 - 7x^3 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 5\sqrt{x} + x^{-9} + \frac{3}{4}\sin x - \frac{4}{5}\cos x$

(2) $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^n}$

(3) $5\cos x - \tan x - x^{11} - \dfrac{1}{2}x^5.$

தேற்றம் V : இரண்டு சார்புகளது பெருக்கற்பலனின் வகைகெழு $y = uv$ என்க. இங்கு u, v என்பன x-ன் சார்புகளாம்.

δx-ல் நேரும் அதிகரிப்புக்கு ஏற்ப, u, v-களில் நேரும் ஏற்றங்களும், அவற்றின் விளைவாக y-ல் உண்டாகும் ஏற்றமும் முறையே $\delta u, \delta v, \delta y$ என்போம்.

$$\therefore \quad y + \delta y = (u + \delta u)(v + \delta v) \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad \delta y = (u + \delta u)(v + \delta v) - uv$$

$$= uv + u\delta v + vdu + \delta u \cdot \delta v - uv$$

$$= u\delta v + vdu + \delta u \cdot \delta v.$$

$$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x} = u \cdot \frac{\delta v}{\delta x} + v\frac{\delta u}{\delta x} + \delta u \cdot \frac{\delta v}{\delta x}$$

$$\therefore \quad \underset{\delta x \to 0}{\text{lt}} = \underset{\delta u \to 0}{\text{lt}} \left(u \cdot \frac{\delta v}{\delta x} + v \cdot \frac{\delta u}{\delta x} + \delta u \cdot \frac{\delta u}{\delta x} \right)$$

$$= \underset{\delta u \to 0}{\text{lt}}\; u \cdot \frac{\delta v}{\delta x} + \underset{\delta u \to 0}{\text{lt}}\; v\frac{\delta u}{\delta x} + \underset{\delta x \to 0}{\text{lt}}\; \delta u \cdot \frac{\delta v}{\delta x}$$

[பகுதி 1.9 (ii)]

$$= u \underset{\delta u \to 0}{\text{lt}} \frac{du}{dx} + v \underset{\delta x \to 0}{\text{lt}} \frac{\delta u}{\delta x} + \delta u \cdot \underset{\delta x \to 0}{\text{lt}} \frac{\delta u}{\delta x}$$

$$= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + v \cdot \frac{dv}{dx}$$

($\because$ $\delta x \to 0$ $\delta u \to 0$, ஆகவே வரம்பும் 0 ஆகும்.)

அதாவது, $\dfrac{dy}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

ஆகவே, $y = u \cdot v$ ஆனல், $\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$ ஆகும்.

கிளை 1 :

மேற்கண்ட பயன்கள் 3 அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சினைகளுக்கும் (Products) விருத்தி செய்து கொளளலாகும். $y = uvw$ ஆனல்,

$$\frac{dy}{dx} = vw \frac{du}{dx} + wu \frac{dv}{dx} + uv \frac{dw}{du} \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது, ஒரு பெருக்கற்பலனுக்கு வகைகெழு காண, ஒவ்வொரு சினையின் வகை கெழுவையும் ஏனைய சினைகளால் மாறி மாறிப் பெருக்கிக் கொண்டு, அங்ஙனம் பெற்ற பலன்களையெல்லாம் கூட்டிக் கொள்ளலாம்.

மறுபடியும், இரு பக்கங்களிலும் உள்ளவற்றை uvw -ஆல் வகுக்க, மேற்கண்ட பலனனது

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{w} \frac{dw}{dx} \text{ என்றாகும்.}$$

கிளை 2 : $y = v^n$ ஆனல், $\frac{dy}{dx} = n v^{n-1} \frac{dv}{dx}$

(இங்கு v ஆனது x-ன் சார்பாகும்.)

கிளை 3 : $\frac{d}{dx} (Cu) = C \frac{du}{dx}$

கிளை 4: $\frac{d}{dx} (C_1 u_1 \pm C_2 u_2 \pm \ldots) = C_1 \frac{du_1}{dx}$

$$+ C_2 \frac{du_2}{dx} + \ldots .$$

விளக்க உதாரணங்கள்

(1) x உடன் சார்த்தி $(5 - 7x^2) \cos x$-ன் வகையீட்டைக் காண்க.

$$\frac{d}{dx} \{(5-7x^2) \cos x\} = (5-7x^2) \frac{d}{dx} (\cos x)$$

$$+ \cos x \cdot \frac{d}{dx} (5-7x^2)$$

$$= (5-7x^2)(-\sin x) + \cos x(-14x)$$
$$= (7x_4-5)\sin x - 14\cos x.$$

(2) x உடன் சார்த்தி $(1-x)(x^2+1)(2-3x^2)$-ன் வகையீட்டைக் காண்க.

$$\frac{d}{dx}\{(1-x)(x^2+1)(2-3x^2)\}$$

$$= (x^2+1)(2-3x^2)\frac{d}{dx}(1-x) + (2-3x^2)(1+x)$$
$$\frac{d}{dx}(x^2+1) + (1-x)(x^2+1)\frac{d}{dx}(2-3x^2)$$

$$= (x^2+1)(2-3x^2)(-1) + (2-3x^2)(1-x)(2x)$$
$$+ (1-x)(x^2+1)(-6x)$$

$$= 15x^4 - 12x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \text{ (சுருக்கியபின்)}$$

பயிற்சிக்குரிய மாதிரிகள்

x உடன் சார்த்தி வகையீடு செய்க :

(i) $(x^2-2x+1)(3x+1)$ (ii) $\cos x \sin x$

(iii) $(x^m+a^m)(a^n-x^n)$ (iv) $4x^3\cos x - 2x\sin x + 5$

(v) $\sqrt{x}\,(1-2x)$ (vi) $(x^2+1)(2x-3)(1-x)$

(vii) $x(1-x^2)(4-3x^5)$.

தேற்றம் VI : இரண்டு சார்புகளின் ஈவு குறித்த வகையீடு

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\cdot\frac{du}{bx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$y = \frac{u}{v}$ என்க. இதனால் $u = vy$ ஆகும்.

∴ பெருக்கல் விதிப்படி வகைகெழு நாட

$$\frac{du}{dx} = v\frac{dy}{dx} + y\frac{du}{dx} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad v\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - y\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{du}{dx} - y\frac{dv}{dx}\right) / v \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு $y = \frac{u}{v}$ என்னும் மதிப்பைப் புகுத்திஞல், பெற வேண்டிய வகைக்கெழு வாய்க்கும்.

கிளை : $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$

[குறிப்பு : பெருக்கல் விதியைக் கைக்கொள்ளாமல் மேற் கண்ட பலன்களைப் பெற முயல்க.]

பயிற்சிக்குரிய மாதிரிகள்

ஈவு பற்றிய சூத்திரத்தைப் பயன்கொண்டு பின்வரும் கோவைகளுக்கு வகைகெழு காண்க :

(1) $\frac{1}{x}$ (2) $\frac{3}{x^2}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

(4) $\frac{3}{2x-7}$ (5) $\tan x$ (6) $\operatorname{cosec} x$

(7) $\sec x$ (8) $\cot x$ (9) $\frac{2x^2+1}{3x-4}$

தேற்றம் VII : சார்பின் சார்பு (Function of a Function)க்கு வகையீடு காணல் :

$y = f(u)$-ம், $u = \phi(x)$-ம் ஆனுல்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ ஆகும்.}$$

x-ல் உண்டாகும் δx ஏற்றத்திற்குத் தக்கதாக u-க்கு δu ஏற்றமும், அவை பற்றிய விளைவாக y-ல் δy ஏற்றமும் உண்டாவதாகக் கொள்ளுவோம்.

அப்பொழுது, $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta y}{\delta u} \cdot \frac{\delta u}{\delta x}$ ஆகப் பெறுகின்ரும்.

$$\therefore \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\delta y}{\delta u} \cdot \frac{\delta u}{\delta x} \right)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta u} \cdot \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta u}{\delta x} \text{ ஆகும்.}$$

[பகுதி 1·9 (iii)]

$$\lim_{\delta u \to 0} \frac{\delta y}{\delta u} \cdot \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta u}{\delta x}$$

($\because \delta x \to 0$ ஆனால் $\delta u \to 0$ ஆகும்.)

அதாவது, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ ஆகும்.

கிளை 1 : y ஆனது u-ன் சார்பாகவும், u ஆனது v-ன் சார்பாகவும், v ஆனது x-ன் சார்பாகவும் அமையுமானால்,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \text{ ஆகும்.}$$

கிளை 2 : $y = u^n$ ஆனால்,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = n \cdot u^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}$$ [தேற்றம் VI-கிளை 2]

கிளை 3 : (i) $y = \sin ax$ ஆனால், $dy = a \cos ax$.

(ii) $y = \sin (ax + b)$ ஆனால், $\frac{dy}{dx} = a \cos (ax + b)$

(iii) $y = \cos ax$ ஆனால், $\frac{dy}{dx} = -a \sin ax$

(iv) $y = \cos (ax + b)$ ஆனால், $\frac{dy}{dx} = -a \sin (ax + b)$

(v) $y = \sin x^\circ$ ஆனால், $\frac{dy}{dx} = -\frac{\pi}{180} \cos x^\circ$

(vi) $y = \cos x^\circ$ ஆனால், $\frac{dy}{dx} = -\frac{\pi}{180} \sin x^\circ$

(vii) $y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ஆனால்,

$$\frac{dy}{dx} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \times -1 = -\sin x.$$

கிளை 4: $\dfrac{dx}{du} = \dfrac{1}{\dfrac{du}{dx}}$

மேலேயுள்ள தேற்றம் VII-ல் கண்ட பலனில் $y = x$ என்று இட்டால் இது பெறப்படும்.

தனிப்பட $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$ என்று நிரூபி.

விளக்க உதாரணங்கள்

(i) $\cos^3 x$-ன் வகை கெழுவைக் (derivative) கண்டறிக.

$y = \cos^3 x$ ஆகக் கொண்டு, $u = \cos x$ என்றிடுக.

அப்பொழுது $y = u^3$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2\,(-\sin x)$$

$$= -3u^2 \sin x$$

$$= -3\cos^2 x \sin x \text{ ஆகும்.}$$

(ii) x உடன் இயைத்து $\sin^m ax$ என்றதற்கு வகையீட்டுக் குணகத்தைக் (differential coefficient) காண்க.

$y = \sin^m ax$ என்று கொண்டு, $ax = v$ என்றும், $\sin v = u$ என்றும் இடுக.

அப்பொழுது, $y = u^m$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$= m u^{m-1} \cdot \cos v \cdot a = ma\, u^{m-1} \cos v$$

$$= ma \sin^{m-1} ax \cos ax.$$

(iii) x-ஐச் சார்த்தி $\sin^3 5x \cos^2 7x$-க்கு வகையீடறிக :

$y = \sin^3 5x \cos^2 7x$ எனக்கொண்டு, $u = \sin 5x$ என்றும், $v = \cos 7x$ என்றும் இடுக.

அப்பொழுது $y = u^3 v^2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = u^3 \frac{d}{dx}(v^2) + v^2 \frac{d}{dx}(u^3)$$

$$= u^3 . 2v \frac{dv}{dx} + v^2 . 3u^2 \frac{du}{dx}$$

இப்பொழுது,

$$\frac{du}{dx} = 4 \cos 5x\text{-ம்}, \frac{dv}{dx} = -7 \sin 7x\text{-ம் ஆகும்}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -14 u^3 v \sin 7x + 15 u^2 v^2 \cos 5x \text{ ஆகும்.}$$

இந்நிலையில் u-க்கும் v-க்கும் இட்ட மதிப்புகளைப் பிரதி செய்து சுருக்கிக் கொள்க.

(iv) $y = (x^2 - 1)^m (1 - x)^n$ ஆனல் $\frac{dy}{dx}$ ஐ அறிக.
$u = x^2 - 1$-ம், $v = 1 - x$-ம் ஆகட்டும்.

அப்பொழுது, $y = u^m v^n$ ஆகும்.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = u^m \frac{d}{dx}(v^n) + v^n \frac{d}{dx}(u^m) \text{ ஆகும்.}$$

$$= u^m . n\, v^{n-1} \frac{dv}{dx}\ v^n . m . u^{m-1} \frac{du}{dx} \text{ ஆகும்.}$$

இப்பொழுது,

$$\frac{dv}{dx} = -1\text{-ம்}, \frac{du}{dx} = 2x\text{-ம் ஆவதனைப் புகுத்தினல்,}$$

$$\frac{dy}{dx} = u^m . n . v^{n-1}(-1) + v^n . m . u^{m-1}\, 2x$$

$$= 2mx\, v^n u^{m-1} - n\, n^m v^{n-1}$$

$$= v^{n-1} u^{m-1} (2mvx - 'nu)$$

இங்கு $u=x^2-1$, $v=1-x$ என்று பிரதியிட்டுச் சுருக்கிக் கொள்க.

பயிற்சிக்குரிய மாதிரிகள்

(1) $\sqrt{a^2-x^2}$ (2) $(x^3-1)^4 \cos^5 2x$

(3) $\cos 3x^\circ$ (4) $x^3(\sin 2x+\cos x)(4x^3+1)^5$

(5) $(2x^3-5x^2+7).\cos^3 5x$ (6) $\sin^m ax \cos^n bx$

(7) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin\frac{x}{3}}{4}$ (8) $x^3(1+\cos 2x)^2$

(9) $\sin^4(3x-5)$ (10) $(x^2-x^2)^5(x^6+b^2)^7$

(11) $a\cos 2x.(x^2-\tan^2 3x)$

(12) $2\sin^2(ax+b)-3\cos(ax+b)+1$

(13) $(1-x)^2(2-3x)^3(x^2+1)$

(14) $x(1+x^3)^2(2-3x)$ (15) $5x^2-x\cos^3 4x$

(16) $x=\sin y$ ஆனல், $\dfrac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

(17) $y=\tan^{-1}x$ ஆனல், $\dfrac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

(18) $xy^2=C$ ஆனல், $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dx}{dy}$ என்பனவற்றைத் தனித் தனியாகக் கண்டறிந்து,

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$$ என்பதனைச் சரிபார்க்க.

தேற்றம் VIII: $x=f(t)$-ம், $y=\phi(t)$-ம் ஆனல்,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$ ஆகும்.

$x = f(t)$ ஆகும்பொழுது t ஆனது x-ன் ஒருவகைச் சார்பாகும். ஆகவே, y ஆனது t-ன் சார்பாகவும், t ஆனது x-ன் சார்பாகவும் நிற்கும்.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \text{ [தேற்றம் VI]}$$

$$= \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} \text{ [தேற்றம் VII, கிளை 4]}$$

x-ம் y-ம் மூன்றுவதொரு மாறியைக் குறித்தொழுந்த சார்பு களாகவுள்ளபொழுது, மேலே காட்டிய சூத்திரம் பயன்படுவதாகும்.

உதாரணமாக, ஒரு வளைவரையின் மீதுள்ள புள்ளிக்கு உரிய அச்சுத் தூரங்களை வழக்கமாகப் பொது மாறி யொன்றைச் சுட்டியே குறிப்பிடுவது வழக்கம். யாங்ஙனமெனில், $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$ என θ பெறும் எல்லா மதிப்புகளையும் அகப்படுத்தி, $x^2 + y^2 = a^2$ என்னும் நியமமுடைய வட்டத்தின் மீதுள்ளதொரு புள்ளிக்கு ஆயத் தொலைகள் குறிப்பிடுவதுண்டு.

$\therefore$ வட்டத்தின்மேலுள்ள யாதொரு புள்ளி (x, y) யிடத்தும்

$$\frac{dy}{dx}\text{-ன் மதிப்பானது} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = -\frac{a\cos\theta}{a\sin\theta} = -\frac{x}{y} \text{ ஆகும்.}$$

பயிற்சிக்கு உரிய மாதிரிகள்

(i) $x = am^2$, $y = 2am$ (ii) $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$

(iii) $x = ct$, $y = \dfrac{c}{t}$ (iv) $x = a\sec\theta$, $y = b\tan\theta$

ஆகும்பொழுது $\dfrac{dy}{dx}$ ஐக் கண்டறிக.

தேற்றம் IX : உட்படு சார்புகளுக்கு வகையீடு காணல் (differentiation of implicit functions)

x-ன் உட்படு சார்பாக y-ஆனது $2x^2 - 6xy + 3y^3 - 1 = 0$ அல்லது $x^n + y^n = c^n$ என்பன போலக் கொடுக்கப்பட்டபொழு

தெல்லாம் y-க்குத் தீர்வுகாண முயலுதல் அறிவுறுத்தப் பெருது. நாம் x ஐச் சுட்டி வெளிப்படையாக y-ன் மதிப்புக்குத் தீர்வுகாண இயலுமாயினும் இயலாதாயினும், y ஆனது x-ன் ஒரு வகையான சார்பாகும் என்பதனை மட்டும் நன்கறிவோம்.

இவ்வகைகளில் x ஐக் குறித்து இருபக்கங்களிலும் வகையீடு செய்தபின், எஞ்சி நிற்கும் சமன்பாட்டிலிருந்து $\frac{dy}{dx}$ -ன் மதிப்பைப் பெறுவோம்.

பயிற்சிக்குரிய மாதிரிகள்

பின்வரும் வகைளில் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் கண்டறிக :

(1) $x^2+y^2=a^2$ (2) $y^2=4ax$ (3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

(4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (5) $xy=C$

(6) $a\cos mx+b\sin ny=C$

(7) $xy^2+x^2y^3-x-2y-5=0$

(8) $ax^2+2h\,xy+by^2+2gx+2fy+C=0.$

பயிற்சி 2·1

ஆரம்பக் கோட்பாட்டை யொட்டி வகையீட்டுக் குணகத்தைக் கண்டறிக :

(i) $2x^3$ (ii) x^5 (iii) $\sin 2x$

பின்வருங் கோவைகளுக்கு x ஐப் பொறுத்து வகை கெழு காண்க :

(2) $x^3(3x+1)$; $\sin^2 3x$ $(2x+1)$ $(x-1)^2$; $\cos^2 5x$.

(3) $x^3\cos x$; $(1+2x)(1+4x^2)$

$(ax+b)^2$; $x^2\sin 2x$; $\cos 3x\sin 5x$

(4) $x^2 \cos 2x$; $(4x+3)^4$

$(x+5)^4\, x^2$; $\sin^2 x \cos 2x$

(5) $x \cos x$; $(x^2-4x+1)^3$

$(x^2+x+1)^5$

(6) $x^3 \sin x$

(7) $(x+5)^3\,(x+2)$; $\sin 2x - 3\cos^3 x$

(8) $x^2\,(3x-2)^3$; $x \sin^3 3x$

$\sin mx \sin nx$; $x^3\,(2x+3)^2$

(9) $x\,(2-x)^4$; $4\cos^3 2x$

$(1-3x^2)^3$; $x^2 \sin 2x$

(10) $(1+x^2)(1-2x^2)$; $\sin^2 x \cos x$

$x^2\,(1-x)^5$; $3\sin^4 2x$

(11) $x^m\,(1-2x)^3$; $2\cos^5 3x$

(12) $x\,(1-x)^2\,(1+x^2)$; $\sin^2 3x \cos 3x$

$(1+x^2)(1-2x^2)^3$; $x^2 \sin^3 2x$

(13) $\cos^3 10x$; $(x^5-2x^3)(x^2+1)$

(14) $\sin\,(2-5x)^4$; $x^3 \cos^2 x$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$; $\sin 5x \cos 3x$

(15) (i) $y = \dfrac{8x+5}{3x+4}$ ஆனால், $\dfrac{dy}{dx}$ ஐக் கணிக்க.

(ii) $y = \dfrac{2x^3-5x+1}{x+7}$ ஆனால், $\dfrac{dy}{dx}$ ஐக் கணிக்க.

(16) xஐ யொட்டி (i) $x \sin x$ (ii) $\cos^2 x$ என்பவற்றிற்கு வகை கெழுவைக் கண்டறிக.

2.6. அடுத்தடுத்து (தொடர்) வகை கெழு காணல் (Successive differentiation): உயர் வரிசை வகை கெழுக்கள் (Derivatives of Higher Orders)

y ஆனது x-ன் சார்பானல், அதிலிருந்து வருவித்த $\frac{dy}{dx}$ என்னும் சார்பும் பொதுவாக x ஐ யொட்டி வகைகெழு காண்பதற்குரிய நிலைமையதாதல் உண்டு. $\frac{dy}{dx}$ ஐ வகையீடு செய்துதன் பயன் இரண்டாவது வகையீட்டுக் குணகம் அல்லது இரண்டாம் வரிசை வகை கெழு என வழங்கப்படும். இது $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ என்று பிரதியிடப்படும். $\frac{d^2y}{dx^2}$ எனக் குறியீடு பெறும். x ஐ இயைபுற்று மூன்ருவது வகையீட்டுக் குணகம் உளதாயின், அது $\frac{d^3y}{dx^3}$ என்று குறிக்கப்பெறும். இதே குறியீட்டை வழி யொட்டி n ஆவது வகையீட்டுக் குணகமாவதொன்று நிலைபெறுமாயின், அது $\frac{d^xy}{dx^x}$ என்று குறிப்பிடப்படும்.

நாம் $\frac{d}{dx}$ என்பதைச் செய்முறைக்கு உரிய குறியீடாகக் காண்போமானல், முதலாவது, இரண்டாவது, மூன்ருவது ... ... n ஆவது வகை கெழுக்களை முறையே,

$$\frac{d}{dx}\cdot y;\ \left(\frac{d}{dx}\right)^2 y;\ \left(\frac{d}{dx}\right)^3\cdot y \ldots \left(\frac{d}{dx}\right)^n\cdot y$$

என்று எழுதிக் கொள்ளலாம். அன்றியும் $\left(\frac{d}{dx}\right)$-க்குப் பதிலாக D என்று எழுதி, Dy; D^2y; D^3y; ... D^ny என்னும் வடிவிலும் எழுதிக் கொள்ளலாம்.

$y = f(x)$ ஆனல், அடுத்தடுத்துப் பெறப்படும் தொடர்நிலை வகை கெழுக்களை $f'(x)$; $f''(x)$; $f'''(x)$ ...... $f^{(n)}(x)$ அல்லது y', y'', y''' ...... $y^{(n)}$ அல்லது y_1; y_2; .... y_n என்று வரைந்து கொள்ளுதலுமுண்டு.

காலத்தைச் சார்பற்ற மாறியாகக் கொண்டு கண்டறியும் முதலாம், இரண்டாம் வகை கெழுக்கள் வழக்கமாக y', y'' என முறையே குறிக்கப்படும்.

விளக்க உதாரணங்கள்

$y = (5x-7)^4$ ஆனல், $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ஐக் காண்க.

$u = 5x-7$ எனக் கொண்டால், $y = u^4$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(u^4) = 4u^3 \frac{du}{dx} = 4u^3 \,.\, 5$$

$$\left(\because \quad \frac{du}{dx} = 5 \text{ ஆதலின்} \right)$$

$$= 20\, u^3$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(20\,u^3) = 20\,\frac{d}{dx}(u^3)$$

$$= 20 \,.\, 3 \,.\, u^2 \frac{du}{dx}$$

$$= 60u^2 \,.\, 5 = 300\, u^2 = 300\,(5x-7)^2$$

(பிரதியீடு செய்தபின்)

(2) $y = 12 \cos \sqrt{2}\, x - \sin 5 \sqrt{2}\, x$ எனக் கொடுக்கப் பட்டதனைக் கொண்டு $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2y = 0$ எனக் காட்டுக.

$$\frac{dy}{dx} = -\, 12 \sqrt{2} \sin \sqrt{2}\, x - 5 \sqrt{2} \cos \sqrt{2}\, x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\, 12 \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cos \sqrt{2}x - 5 \sqrt{2}$$

$$(-\sqrt{2} \sin \sqrt{2}\, x)$$

$$= -\, 24 \cos \sqrt{2}\, x + 10 \sin \sqrt{2}\, x$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 2y = -\, 24 \cos \sqrt{2}\, x + 10 \sin \sqrt{2}\, x$$

$$+\, 2\,(12 \cos \sqrt{2}\, x - 5 \sin \sqrt{2}\, x)$$

$$= 0.$$

பயிற்சி 2.2

1. $y = \sin x$ ஆனால்,

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + (x^2+2)y = 0$$

2. $y = 3x + \sin x$ ஆனால்,

$$y + \frac{d^2y}{dx^2} = 3x$$ எனக் காட்டுக.

3. $y = ax^2 + bx$ ஆனால்,

$$x^2 \frac{d^2y}{d^2x} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$ எனக் காட்டுக.

4. $y = 20 \cos 5x + 48 \sin 5x$ ஆனால்,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 25y = 0$$ எனக் காட்டுக.

5. $y = \sin x \cos x$ ஆனால்,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$$ எனக் காட்டுக.

6. $\frac{d}{dx}\left(x \cdot \frac{dy}{dx} \right) = x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}$ எனக்காட்டி, $y=x^2-3x$ ஆகும்பொழுது இதனைச் சரிபார்க்க.

7. $y = a \cos 5x + b \sin 5x$ ஆனால்,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 25y = 0$$ என நிரூபிக்க

8. $y = x \sin x + 3x^2$ ஆனால், $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐக் கண்டறிக.

9. $y = x \cos x$ ஆனால்,

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + (x^2 + 2)\, y=0$$ எனக் காட்டுக.

10. $y = \sin 5x - 3 \cos 5x$ ஆனால்,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 25y = 0$$ எனக் காட்டுக.

11. $y = 5x^2 - x$ ஆனல், $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐக் கண்டறிக.

12. $y = x \sin x$ ஆனல்,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 2 \cos x$$ என நிரூபிக்க

13. $y = (1 - 3x)\ (1 + 4x^2)$ ஆனல், $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐக் காண்க

14. $y = 3 \sin 4x + 5 \cos 4x$ ஆனல்,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 16y = 0$$ என நிரூபிக்க

15. $y = (1 - 2x)\ (2 - 3x^2)$ ஆனல், $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐக் கண்டறிக

16. $t^2 \frac{d^2r}{dt^2} - t \frac{ds}{dt} - 3s = 0$ என்பதற்கு $\frac{3}{t} + 4t^3$ பொருந்துமென நிரூபிக்க.

17. $y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax$ (c_1, c_2 மாறிலிகளாம்)

ஆனல், $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0$ என நிரூபிக்க.

மேலுள்ளவற்றில் (17), (21) என்னும் எண்ணுள்ள கணக்குகள் (4), (7), (10), (14) என்னும் எண்ணுள்ள கணக்குகளின் பொது வடிவங்களாம்.

(18) $y = (8x + 5)\ (3x^2 + 4)$ ஆனல், $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐக் காண்க

(19) $y = ax - bx^2$ ஆனல்,

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2y = 2x. \frac{dy}{dx}$$ ஆகும்.

(20) $y = (2x + 1)\ (3x^2 + 1)$ ஆனல், $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐக் கண்டறிக

(21) a, b, n என்பன மாறிலிகளாகுமிடத்து

$y = a \cos nx + b \sin nx$ ஆனல்,

$\frac{d^2y}{dx^2} + x^2y = 0$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

(22) $y =$ (i) $5x^2 - x \cos^3 4x$

(ii) $x + \sqrt{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

ஆனல், $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐக் கண்டறிக.

3. வகைக்கெழுவின் பயன்பாடுகள்

(Applications of Differentiation)

3.0. வகையீட்டின் செயற்பாடுகள் பொதுவாக அறுவகைத் தலைப்பின் கீழ் அடக்கப் பெறும். அவையாவன

(i) வடிவ கணித இயல்பு வகைகளை ஆராய்தல் (geometrical applications).

(ii) அளவைகளை ஒட்டிய பிழைகளையும், தோராய மதிப்புகளையும் நிச்சயித்தல் (errors and approximations).

(iii) பெருகியும் குறுகியும் அமையும் மதிப்புடைய சார்புகளின் போக்குகளை ஆராய்தல் (increasing and decreasing functions).

(iv) சார்புக்கு ஏற்ப அமைவுறும் வளைவரைகளில் மீப்பெரு மதிப்பும், மீச்சிறு மதிப்பும், அவை கிடக்கும் இடங்களும் ஆகியவற்றை ஆராய்தல் (Maxima and Minima values of Functions).

(v) வகை கெழுவின் விவரணமும், அதைக் கொண்டு அறியத்தகு எந்திர இயல்புகளும் (Physical interpretation of the derivative application to mechanics).

(vi) ஒன்றற்கொன்று தொடர்புடைய வீதங்கள் (related rates) என்பனவாம். இவற்றை முறையாக ஆராயப் புகுவோமாக.

3.1. வடிவ கணித இயல்புகளை ஆராய்வதற்கு அமைவுறும் செயற்பாடுகள்

(1) கொடுத்ததொரு வளைவரையில் குறிப்பிட்டதொரு புள்ளியிடத்து வரைதலுறும் தொடுகோட்டின் திசையறிதலைப் பற்றிய

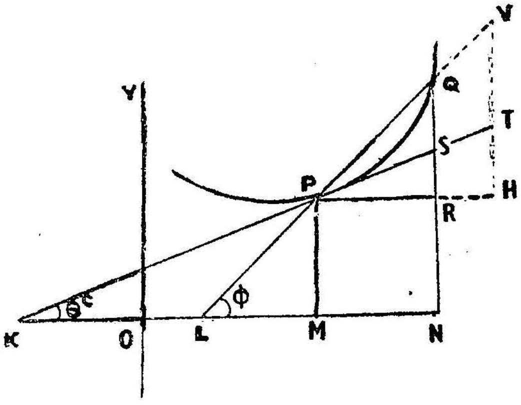
பிரச்சினையை ஒட்டி வகை நுண்கணிதம் பிறந்தது. இப்பொழுது வளைவரை மீதுள்ள P என்னும் யாதேனும் ஒரு புள்ளியிடத்து வரையப்பெறும் தொடுகோட்டின் விவரணம் பின்வருமாறு ஆகும் :

வளைவரையின் மீது உள்ளதாகக் கொடுக்கப்பட்ட P என்னும் புள்ளியிடத்து வரைந்த தொடுகோடாவது, PQ என்னும் வெட்டுக் கோட்டினது Q என்னும் புள்ளியானது எப்பக்கத்திலிருந்தேனும் P ஐ நோக்கி வரையின் வழியே அணுகுங்கால் அமைய வரும் எல்லை நிலைமை (limiting position) ஆகும்.

Q என்னும் இடம் பெயர் புள்ளியானது P ஐ நோக்கிப் பாதை வழியே அணுகி வருவதே அல்லது. அவ்விரு புள்ளிகளையும் ஒன்றோடொன்று இணையுமாறு செய்ய இயலாது. இணைவுறும் புள்ளிகளை இணைக்குமாறு யாங்ஙனம் முடியும்? இடைவெளியின்மையின் இந்நிலைமையானது $h = 0$ ஆகுங்காலத்தும், $h \to 0$ ஆகுங்காலத்தும், $\frac{\{f(x+h) - f(x)\}}{h}$ -ல் உண்டாகும் விளைவுக்கு ஒப்பதாகும்.

(2) **வகை கெழுவுக்குப் படிவ கணித முறையில் விளக்கம் :**

இரண்டாவது படம் $y = f(x)$ என்னும் சார்பைக் குறிக்கும் வரைபடமாகுக. $P(x, y)$ என்பது அவ் வளைவரையின் மீதுள்ள



படம் 2.

தொரு புள்ளியாகவும், $Q(x+\delta x, y+\delta y)$ என்பது அதற்கு அண்மையிலுள்ளதொரு புள்ளியாகவும் கொள்க. PM, QM என்பன முறையே P, Q-க்களிலிருந்து வரையப்படும் நிலைத்

தூரங்கள் (ordinates) ஆகுக. X அச்சுக்கு ஒரு போகாக PRஐ வரைந்து NQஐ R என்னுமிடத்தில் சந்திப்பதாகுக. QP-ன் நீட்சி x-அச்சை L என்னுமிடத்தில் சந்திப்பதாகுக. P என்னுமிடத்தில் வரையும் KPS என்னும் நேர்க்கோடு X அச்சை K என்னுமிடத்திலும், NQஐ S என்னும் இடத்திலும் சந்திப்பதாகட்டும்.

(குறிப்பு : H, T, V என்னும் புள்ளிகள் இங்குக் காட்சி விளக்கத்திற்காகக் கொள்ளப்பட்டன என்க.)

$$\text{இனி } PR = MN = ON - OM = (x+\delta x) - x = \delta x$$
$$RQ = NQ - MP = (y+\delta y) - y = \delta y.$$

ஆகவே, $\dfrac{\delta y}{\delta x}\left(= \dfrac{RQ}{PR} \text{ ஆதலின்}\right)$. PQ என்னும் நாணினது சாய்வைக் குறிக்கும். இப்பொழுது $\delta x \to 0$ ஆகுக. y ஆனது x-ன் தொடர்ச்சியான சார்பாதலின், δy-ம் கூடப் பூச்சியத்தை அணுகுவது ($\to 0$) ஆகும் ; அதாவது, Q ஆனது வளைவரையின் வழியே நகர்ந்து வந்து, தனது பெயர்ச்சிக்கு எல்லையிடமாகப் Pஐ நெருங்கா நிற்கும். ஆகவே, PR-ம், QR-ம் பூச்சியத்தை அணுகுவனவாகும். ஆனால், அவற்றுனும் விகிதம் ஒரு மதிப்பு வரம்பை எய்தும். விவரணத்தின்படி, தொடுகோடானது பொதுவாகப் PQ என்னும் வெட்டுக் கோட்டின் முடிந்த வரம்புநிலைக் கண்ணது ஆகும்.

ஆகவே, P என்னுமிடத்தில் வரைந்த தொடுகோடானது X அச்சுடன் மிகைராசித் திசையில் θ கோணம் அகப்படுத்து நிற்பதாகவும், அவ்வாறே PQ என்னும் வெட்டுக் கோடும் ϕ கோணம் அமையக் கொண்டுள்ளதாகவும் பெற்றால், $\delta x \to 0$ ஆகும்பொழுது $\angle NLP \to \angle NKP$ ஆகும். ஆகவே,

$$\tan\theta = \lim_{Q\to P} \tan\phi = \lim_{Q\to P}\frac{RQ}{PR} \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx}$$

∴ ஒரு வளை கோட்டின் மீதுள்ள யாதொரு புள்ளியிடத்தேனும் அமைவுறும் தொடு கோட்டின் சாய்வானது அப் புள்ளிக் கண் $\dfrac{dy}{dx}$-ன் மதிப்புக்குச் சமமாகும் எனப் பெறப்படும்.

(3) ஒரு வளைவரையின் சரிவு (Gradient of a curve) :

ஒரு நேர்க் கோட்டைப் போலன்றி, ஒரு வளை கோடானது அதன் நீட்சியில் யாங்கணும் ஒரு படித்தாகிய சரிவைக் கொண்

டிருப்பதாகாது. ஆகவே, அவ் வளைவரையின் மீதுள்ள ஏதேனு மொரு குறிப்பிட்ட புள்ளி யிடத்தில் கண்ணுறும் சரிவு நிலையைப் பற்றியேதான் நாம் பேசக் கூடியவர்களாகின்றோம்.

(4) யாதொரு புள்ளியிடத்தேனும் உள்ள தொடுகோடு செங்கோடுகளுக்குச் சமன்பாடு காணல் :

வளைவரையின் சமன்பாடு $y = f(x)$ ஆனால், $(x_1\ y_1)$ என்னும் புள்ளியிடத்தில் தொடு கோட்டின் சாய்வு அல்லது சரிவு $f'(x_1)$ ஆகும். அதனால் அக்கோட்டின் சமன்பாடு,

$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$ ஆகும் (புள்ளிச் சரிவு வடிவம்)

P என்னும் புள்ளியிடத்தில் வரைதல் பெறும் செங்கோடானது (normal), அப்புள்ளிக்கண் இட்ட தொடுகோட்டிற்குச் செங்குத்தாக அப்புள்ளி வழியே செல்லுவதொரு கோடாகும்.

$\therefore$ $(x_1,\ y_1)$ இடத்துள்ள செங்கோடானது $-\dfrac{1}{f'(x_1)}$ சரிவுள்ளதாய் $(x_1\ y_1)$ வழியே செல்லுவதொரு நேர்க்கோடாகும்.

$\therefore$ செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = \left\{\frac{1}{f'(x_1)}\right\}(x - x_1) \text{ ஆகும்.}$$

(5) ஒன்றையொன்று ஊடறுத்து நிற்கும் இரு வளைவரிகளின் இடைப்படு கோணத்தின் விவரணம் (Angle of intersection of two curves : definitions) :

(i) இரண்டு வளைவரைகள் ஊடறுத்து நிற்குமானால், அவை வெட்டுறும் P இடத்தில் ஒவ்வொரு வளைவரிக்கும் ஒன்றாக வரையப்படுந் தொடுகோடுகளுக்கும் இடைப்பட்டுக் கிடக்கும் கோணமே அவ்விரு வளைவரிகளின் வெட்டுக் கோணமாகும் (angle of intersection).

(ii) ஒரு புள்ளியிடத்தில் உண்டாகும் வெட்டுக்கோணம் நேர்க்கோணமானால், அவை யொன்றையொன்று ஊடறுத்துக் கொண்டு உள்ளனவாகும்.

(iii) ஒரு பொதுப் புள்ளியிடத்தில் இரு வளைவரிகளும் ஒரே தொடுகோட்டைப் பெறுவனவாயின், அவை யொன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டு நிற்பனவாகும்.

(iv) ஒரு கோடு P என்னுமிடத்தில் ஊடறுத்துச் செல்லுவதாயின், அப்புள்ளியுள்ள இடத்தில் உண்டாகும் வெட்டுக்கோணமானது அக்கோட்டிற்கும், அங்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டிற்கும் இடையில் கிடக்குங் கோணமாகும்.

6. குறிப்பிட்டதொரு புள்ளிக்கண் இரு வளைவரைகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளும் கோணத்தைக் கண்டறியுமாறு:

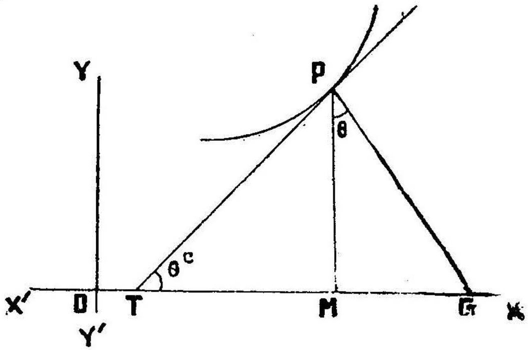
இரண்டு சமன்பாடுகளையும் தீர்வுகண்டு ஊடறுத்து நிற்கும் புள்ளிகளது ஆயத் தொலைகளை அறிந்து கொள்க. ஒவ்வொரு புள்ளி (x_1, y_1) இடத்தும் இரண்டு வளைவரிகளுக்குத் தனித் தனியே உரியனவாகும் சரிவுகளாகிய m, m'-க்களைக் காண்க. அதன் பின் வெட்டுமிடத்து வரையப்படும் தொடுகோடுகளுக்கு இடையே ஏற்படும் α கோணத்தைப் பின்வரும் சூத்திரத்தால் கண்டு கொள்ளலாம் :

$$\tan \alpha = \frac{m - m'}{1 + mm'} .$$

பல வெட்டுமிடங்கள் உண்டானல், ஒவ்வோரிடத்தும் ஏற்படும் வெட்டுக் கோணங்கள் வேறுபட்டே விளங்கும்.

7. தொடுகோட்டடியும், செங்கோட்டடியும் (Sub-tangent and sub-normal) :

$y = f(x)$ என்னும் வளைவரையின் மீது $P(x, y)$ என்னும் யாதேனும் ஒரு புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க. அவ்விடத்தில்



படம் 3.

வரையும் தொடுகோடும் செங்கோடும், x அச்சை முறையே T, G என்னும் இடங்களில் வெட்டுவனவாகுக. P இடமிருந்து PM

என்னும் நிலைத் தூரத்தை இடுக. இப்பொழுது, PT ஆனது தொடு கோட்டின் நீளமாகவும் PG ஆனது செங்கோட்டின் நீளமாகவும் அமையும். இவை இங்ஙனமாக TM ஆனது தொடு கோட்டின் அடியாகவும், MG ஆனது செங்கோட்டின் அடியாகவும் கருதப்படும் இந் நால்வகைக் கோட்டின் நீளங்களையும், y-ம் dx-ம் கொண்டு அளவிட்டுக் காட்டலாம்.

$$MP = y\text{-ம்}; \quad \underline{|MPG} = \underline{|PTM} = \theta \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே, செங்கோட்டடி

$$MG = y \tan\theta = y \cdot \frac{dy}{dx} = yy_1$$

தொடுகோட்டடி

$$TM = y \cot\theta = \frac{y}{\frac{dy}{dx}} = \frac{y}{y_1}$$

செங்கோடு

$$PG = y \sec\theta = y\sqrt{1 + {y_1}^2}$$

தொடுகோடு

$$= y \operatorname{cosec}\theta = \frac{y\sqrt{1 + {y_1}^2}}{y_1}$$

விளக்க உதாரணங்கள் :

(1) $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ என்னும் வளைவரியின் சரிவுகளை $(1,0)$; $(2,0)$; $(3,0)$ என்னும் புள்ளியிடங்களில் கண்டறிக.

ஒரு வரிவளையின் மீதுள்ள புள்ளியிடத்துக்கண் உண்டாகும் சரிவானது, அப்புள்ளியிடத்தில் $\frac{dy}{dx}$-க்கு ஏற்படும் விகித மதிப்புக்குச் சமம் ஆகும்.

இப்பொழுது, $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 11$ ஆகும்.

இனி, $\frac{dy}{dx}$-க்குப் பெறப்பட்ட கோவைக்கண் $(1,0)$; $(2,0)$; $(3,0)$ என்னும் மதிப்புகளை முறையே பிரதியிட, அவ்வப் புள்ளியிடங்களில் ஏற்படும் சரிவுநிலையைக் கண்டு கொள்ளலாம்.

இவ்வகையில் பெறப்படும் சரிவுநிலைகள் முறை 2, − 1, 2 என வரும்.

(2) $y = x^3 - 2x^2 + x$ என்னும் வளைவரியின் மீது எப்புள்ளிகளிடத்து வரையுந் தொடுகோடானது X அச்சுக்கு ஒரு போகாக அமையக் கூடுமெனக் கண்டறிக.

ஒரு வளைவரியின் மீதுள்ள புள்ளியிடத்தில் வரையுந் தொடுகோடானது X அச்சுக்கு ஒரு போகாக அமையுமாயின், அத்தொடுகோட்டின் சரிவு பூச்சியமாகும். ஆகவே, அப்புள்ளியிடத்தில் $\frac{dy}{dx} = 0$ ஆகும். இதனைக் கடைப்பிடிக்கவே,

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு x-ன் இருபடிக் கோவையைத் தீர்வு காணுங்கால், அதற்கு இரண்டுகள் கிடைக்கப்பெறுதலின், இருவகை ஆயத் தொலைகளுள்ள புள்ளியிடங்களில் அமையும் தொடுகோடுகள் X அச்சுக்கு ஒரு போகாகக் கூடுமென அறியலாம்.

இனிக் காரணிப்படுத்த $3x^2 - 4x + 1 = 0$ ஆனது $(x-1)(3x-1) = 0$ ஆகும். இதனால், $x=1$ அல்லது $\frac{1}{3}$ என வரும்.

கொடுத்த கோவையில் இம் மதிப்புகளைத் தனித்தனியே பிரதியிட்டால்,

$$y = 0 \text{ அல்லது } \frac{4}{27} \text{ என வரும்.}$$

இவற்றை நிரல்பட நிறுத்தினால் $(1, 0)$; $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right)$ என்னும் புள்ளிகள் கிடைக்கப்பெறும்.

(3) $y = 3x^2 + 2x + 1$ என்னும் நியமமுடைய வளைவரியின் மீது $x = 1$ என்னும் அச்சுத் தூரத்திற்கு ஏற்ப அதன் மீது கிடக்கும் புள்ளியிடத்தில் இடப்படுந் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைக் குறிக்க.

$x = 1$ ஆகுமிடத்து, $y = 3(1)^2 + 2(1) + 1 = 6$ ஆகும். ஆகவே, $(1, 6)$ என்னும் புள்ளியிடத்தில் நிற்குந் தொடு கோட்டின் சமன்பாடு நம்மால் பெற வேண்டியதாகும்.

எப்புள்ளியிடத்தேனும் வரைதலுறும் தொடு கோட்டின் சரிவு பொதுவாக $\frac{dy}{dx}$ என்னும் விகித மதிப்பால் பெறப்படும். இக் கோவையைப் பொறுத்தவரையில் அச்சரிவு $6x + 2$ ஆகும்.

$\therefore$ $(1, 6)$ என்னும் புள்ளியிடத்தில் உண்டாகும் சரிவு $= 6(1) + 2 = 8$ ஆகும். ஆகவே, $(1, 6)$ என்னுமிடத்தில் இடம் பெறும் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $y - 6 = 8(x - 1)$ அதாவது, $y = 8x - 2$ ஆகும்.

பயிற்சி 3.1

1. $x^3 - 7x^2 + 8x + 10$ என்னும் சார்புக்குரிய வரைபடத்தில்
   (i) $(-1, -6)$; $(2, 6)$; $x = 3$ என்னுமிடங்களில் நேருஞ்சரிவு நிலைகளைக் கண்டறிக.

   (ii) தொடுகோடு X அச்சுக்கு ஒரு போகாகும் புள்ளியிடம்.

   (iii) சரிவுநிலை -7 ஆகும் புள்ளியிடம்.

   (iv) X அச்சின் மிகை இராசித்திசையில் அவ் வச்சோடு $45°$ கோணம் ,c அமைய நிற்குமாறு தொடு கோடொன்று வரையப்படுதற்கு ஏற்ற புள்ளியிடம்.

   (v) $3x + y = z$ என்னுங் கோட்டிற்கு ஒரு போகாக அமையும்படியாகத் தொடுகோடொன்று வரையப் படுதற்கு ஏற்ற புள்ளியிடம்.

   (vi) வரிபடம் y அச்சை ஊடறுக்குமிடத்திலும், $x = -1$ என்னும் அச்சுத் தொலைவு பெறும் புள்ளியிடத்திலும் வரைதற்காம் தொடுகோடு, செங்கோடுகளின் சமன் பாடுகள் ஆகியவற்றைக் கண்டறிக.

2. (i) $xy = 9$ என்னும் வளைவரியில் $x = 4$ என்னும் அச்சுத் தொலைவிலும்,

   (ii) $x^2 + y^2 = a^2$ என்னும் வளைவரியின் மீதுள்ள (x_1, y_1) என்னும்;புள்ளியிடத்திலும்,

(iii) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்னும் வளை வரியின் மீதுள்ள (x_1, y_1) என்னும் புள்ளியிடத்திலும்,

வரையப்படும் தொடுகோடு, செங்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

3. பின்வரும் வளைவரிகள் தம்மை வெட்டிக்கொள்ளுமிடங்களில் உண்டாகும் கோணத்தின் அளவை அறிக :

(i) $y = x^2$-ம், $y^2 = 8x$-ம் (ii) $x^2 = 4y$-ம், $y^2 = 4x$-ம்

(ii) $y = \frac{x^2}{2}$-ம், $y = x^3$-ம் (iv) $2y^2 = x^3$-ம், $y^2 = 32x$-ம்

(v) $y^2(5-x) = x^3$-ம் $y = 2x$-ம் (iv) $x^2 - 2y = 8$-ம் $4x^2 + 9y^2 = 36$-ம்.

4. பின்வரும் வளைவரிகள் தம்முள் ஒன்றற்கொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக்கொள்ளுகின்றன எனக் காட்டுக :

(i) $x^2 + 3y^2 = 3$-ம் $x^2 - y^2 = 2$-ம் எல்லா வெட்டிடங்களிலும்.

(ii) $2y = 3x + x^2$-ம், $2x + 3y - y^3 = 0$ ஆதியிடத்தில்.

(iii) $3x^2 + 3y^2 - 50x + 75y + 75 = 0$-ம், $x^2 + y^2 = 25$-ம்.

5. பின்வரும் வரிவளைகள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டிருப்பனவாம் எனக் காட்டுக :

(i) $y = x^3 - 6x^2 + 13x - 9$-ம், $y = x^2 - 3x = 3$-ம் (2, 1) இடத்தில்.

(ii) $x^2 + y^2 = 4$-ம், $xy = 2$-ம்; இவற்றிற்குரிய பொதுத் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டையுங் காண்க.

6. $y = 2x - x^2$ என்னும் வரிவளைக்கு $P(1, 1)$ என்னுமிடத்தில் இட்ட தொடுகோடு X அச்சை T என்னுமிடத்தில் சந்திக்குமானல், PT-ன் நீளத்தைக் கண்டறிக.

7. $y^2 = 4ax$ என்னும் வளைவரையில் எல்லாப் புள்ளியிடங்களிலும் செங்கோட்டடி யொத்த நீட்சியதாமெனவும், தொடு

கோட்டடி அச்சுத் தொலைவுக்கு இருமடங்கு நீளமான தெனவும் காட்டுக.

8. எவ்வளைவரிக்காயினும்

$$\left(\frac{\text{தொடுகோட்டடி}}{\text{செங்கோட்டடி}}\right) = \left(\frac{\text{தொடுகோடு}}{\text{செங்கோடு}}\right)^2$$

எனக் காட்டுக.

9. $y = x^2 + x + 1$ என்னும் வளைவரையானது y அச்சை வெட்டுமிடத்தில் தொடுகோடு, செங்கோடுகளின் அடிகளின் நீளத்தை அறிக.

10. $y = 3x^2 + 2x + 5$ என்னும் வளைவரை y அச்சை யூடறுக்குமிடத்தில் இடப்படும் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டை யறிக.

11. $y = 2x^2 - 3x + 5$ என்னும் வளைவரைக்கு $(1,4)$ என்னும் புள்ளியிடத்தில் அமையும் தொடுகோட்டின் சமன் பாட்டைக் கூறுக. அது X அச்சுடன் 45° கோணம் அகப்படுத்து நிற்கின்றதெனவுங் காட்டுக.

12. $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2$ என்னும் வளைவரையின் மீதுள்ள எப் புள்ளிகளிடத்தில் அமைக்குந் தொடுகோடானது X அச்சுக்கு ஒருபோகு ஆகுமெனக் காண்க. X அச்சுடன் 135° அகப் படுத்து நிற்குந் தொடுகோடானது எப்புள்ளியிடத்தில் அமைந்து நிற்குமெனவுங் காண்க.

13. $y^2 = x$; $x^2 = y$ என்னும் வளைவரைகள் $(1, 1)$ என்னு மிடத்தில் வெட்டிக்கொள்ளுங்கால் உண்டாகும் இடைக்கோணத் தைக் கண்டறிக.

14. $y = 4 - x^2$ என்னும் வரிவளைக்கு $(1,3)$ என்னும் புள்ளியிடத்தில் இடப்பெறும் செங்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

15. $(3,-3)$ என்னுமிடத்தில் $y = 2x - x^3$ என்னும் வளை வரைக்கு இடப்படும் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைக் கூறுக.

16. $y = 5x^3 + 6x^2 + 7$ என்னும் வளைவரை மீதில் $x = 1$ என்னும் அச்சுத் தொலைவில் அமைக்கப்படும் செங்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

17. $y = 5 - 2x^2$ என்னும் வளைவரைக்கு $x = 1$ அச்சுத் தூரத்திலுள்ள புள்ளியிடத்தில் அமைக்கும் தொடுகோடானது இரண்டு அச்சுகளையும் A, B என்னுமிடங்களில் வெட்டுமானால், OAB என்னும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் கண்டறிக.

18. $y = x(7-x)$ என்னும் வரைபடத்தில் $x = 3$ அச்சுத் தூரமுள்ள புள்ளியிடத்தில் சேரும் சரிவையும், θ கோணத்தையுங் கண்டறிக.

19. $x = 1$ என்னுமிடத்தில் $5y = x^3 - 7x - 4$ என்னும் வளைவரிக்கு அமையும் தொடுகோட்டின் நீளத்தைக் கணக்கிடுக.

20. $y = 2x/(1+x^2)$ எனக் கொடுக்கப்பட்ட வளைவரைக்கு ஆதியிடத்தில் அமையுந் தொடுகோட்டின் சரிவு 2 ஆகுமெனக் காண்க.

21. $y = a - bx + 2x^2$ என்னும் வளைவரைக்கு 0 அச்சுத் தூரத்தில் இடம் பெறும் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $3x + y = 2$ ஆகுமென்றும், 1 அச்சுத் தூரமுள்ள இடத்தில் அமையும் செங்கோடானது y அச்சுக்கு ஒரு போகாகுமென்றும் காட்டுக. a, b, c-க்களின் மதிப்பையுங் கண்டறிக.

22. $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1$-ம், $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$-ம் ஆகிய கூம்பு வளைவுகள் $A-B = a-b$ ஆகுமானல், ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளுமெனக் காட்டுக.

23. $y = 2 - 3x + 7x^2 - 5x^3$ என்னும் வளைவரையில் $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$ அச்சுத் தூரமுள்ள புள்ளியிடங்களில் முறையே அமைக்கப்படும் தொடுகோடு, செங்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் குறிப்பிடுக.

24. $y^2 = 4ax$ என்னும் வளைவரைக்கு $(4a, a)$ என்னும் புள்ளியிடத்தில் அமைக்கும் செங்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் குறிக்க.

25. $y = 3x^2 - 4x$ என்னும் வளைவரைக்கு எப் புள்ளியிடத்தில் அமைக்கும் தொடுகோடானது $y = 8x$-க்கு ஒரு போகாக விளங்கும்? இத் தொடுகோடும் ஆயங்களும் அகப்படுத்து நிற்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பைக் கண்டறிக.

3.2. பிழைகளும் தோராய மதிப்புகளும் பற்றிய செயற்பாடுகள் (Applications to errors and approximations)

(1) x-ம் y-ம் பெறும் ஏற்றங்களுக்குள்ள தொடர்பு :

(பக்கம் 62, படம் 2-ல்), X அச்சுக்கு ஒரு போகாக PH ஆனது ஓரலகு நீளமுடையதாக வரையப்படுவதாகுக. HV ஆனது Oy-க்கு ஒரு போகாக வரையப்படுங்கால் P இடத் திட்ட தொடு கோட்டை T இடத்திலும், PQ ஐ V இடத்திலும் சந்திப்பதாகட்டும்.

அப்பொழுது $HT = \dfrac{HT}{PH}$ = [P இடத்திட்ட தொடு கோடாகிய PT-ன் சரிவு (சாய்வு) ஆகும்.]

$$HV = \frac{HV}{PH} = \frac{PQ}{PK} = \frac{\text{நிலைத்தூரத்தின் ஏற்றம்}}{\text{அச்சுத் தூரத்தின் ஏற்றம்}} = \frac{\delta y}{\delta x}$$

இவ்வாறாக, $\dfrac{\delta y}{\delta x} = HV = HT + TV.$

இப்பொழுது Q ஆனது P ஐ அணுகுங்கால், PV ஆனது வரம்புநிலையாகிய PT ஐ நெருங்குகிறது; ஆகவே, V ஆனது T ஐ நெருங்குகிறது. அதாவது, HV ஆனது வரம்பு மதிப்பாகிய HT ஐ நோக்கிக் குறுகுவதாகின்றது.

மேலும், HT ஆனது P இடத்தில் அமைவுறும் தொடு கோட்டின் சரிவுக்குச் சமமாகும். ஆகவே, அது P-ன் நிலையையே சார்புற்றதாகி, δx-ன் மதிப்போடு சார்பற்றதாக நிற்கின்றதாகும். ஆனால், TV ஆனது Q-ன் நிலையிடத்தைச் சார்ந்துள்ளதாவதோடு, Q ஆனது P நோக்கி நகருங்கால் தான் பூச்சியத்தையும் அணுகுகின்றதாகின்றது (அதாவது $\delta x \to 0$).

HT ஐ A என்றும், TV ஐ α என்றும் குறித்துக் கொண்டால்,

$$\frac{\delta y}{\delta x} = A + \alpha \text{ ஆகும்.} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இவ்வாறாக, P என்னும் குறிப்பிட்ட புள்ளியில் ஆரம்பித்து மாறிகளுள் x, y-களின் மதிப்புகளுக்குத் தக, x, y-களின் ஏற்றங்கள்

$$\delta y = A\,\delta x + \alpha\,\delta x \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

என்னும் தொடர்பால் குறிக்கப்படும்.

P ஐ நிலைபெயராததாக நிறுத்தினுல், A ஆனது மாறிலியாக நிற்கும். அப்பொழுது (2)ஆம் சமன்பாட்டிலிருந்து Y-ன் ஏற்றம் இரண்டுறுப்புகளின் கூட்டற் பலனுகுமாறு காண்கின்றேம். முதலுறுப்பாகிய $A\delta x$ ஆனது x-ன் ஏற்றம் A என்னும் மாருத குணகத்தால் பெருக்கப்படும் பலனுக்குச் சமமாகி, P இடத்திலுள்ள தொடு கோட்டின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு புள்ளிக்கு உண்டாகும் ஏற்றத்தைக் குறிப்பிக்கின்றதாகும். இரண்டாவது உறுப்பாகிய $\alpha\delta x$ ஆனது, δx பூச்சியத்தை அணுகும்பொழுது α-ம் பூச்சியத்தை அணுகுதலால், δx ஐ நோக்க மிகவும் சிறியதாகும்.

பயன் (1)-லிருந்து, எல்லை மதிப்புகளையெடுக்க

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = A \quad (\because \delta x \to 0 \text{ ஆகுங்கால் } \alpha \to 0 \text{ ஆதலின்})$$

நாம், $\lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{\delta y}{\delta x}$ என்பதனை $\dfrac{dy}{dx}$ அல்லது $f'(x)$ எனக் குறியிட்டுக் கொள்ள இசைந்துள்ளோமாதலின், $A = \dfrac{dy}{dx}$ அல்லது $f'(x)$ ஆகும்.

ஆகவே, இரண்டாவது சமன்பாடானது,

$$\delta y = f'(x)\,\delta x + \alpha\delta x \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

என எழுதப்படக் கூடும்.

(2) வகையீடுகள் (differentials): வகையீட்டுக் குணகம் (differential coefficient) என்னும் சொல் வழக்கிற்குக் காரணம்:

விவரணம்: $f'(x)$ என்னும் கோவையானது $f(x)$-ன் வகையீடு என வழங்கப்படும்.

இவவாருக $f'(x)$ அதாவது $\dfrac{dy}{dx}$ ஆனது வகையீட்டுக் குணகம் என வழங்கப்பட்டது. ஏனென்ருல், ஒரு சார்பின் வகையீட்டை அறிய, δx என்னும் ஏற்றத்தை $f'(x)$ அதாவது $\dfrac{dy}{dx}$ என்னும் காரணி அல்லது குணகத்தால் பெருக்குகின்றேம்.

(3) x, y-களின் ஏற்றங்களுக்குள்ள தோராய தொடர்பு:

δx-ம் δy-ம் ஒன்றற்கொன்று ஏற்புடைய ஏற்றங்களாகுங்கால், $\delta y = A\delta x + \alpha\delta x$ ஆதலைக் கண்டோம்.

α ஆனது (மிகை இராசியல்லாது குறை இராசியாயினும்) $\delta x \rightarrow 0$ ஆகுமிடத்துத்தானும் பூச்சியத்தை அணுகுவதால், δxஐப் போது மளவு சிறியதாக்குங்கால் αஐ நாம் விரும்பும் அளவுக்கு நுண்ணிய தாக்கலாம்.

உண்மையில், δy-ன் விரிவில் முதலுறுப்போடு ஒப்பிட இரண்டாவது உறுப்பு மிகச் சிறியதாகின்றது. இதற்குக் காரணம் அவற்றின் விகிதம் $\frac{\alpha \delta x}{A \delta x} = \frac{\alpha}{A}$ ஆனது α ஐ எவ்வளவுக்கு எவ்வளவு சிறியதாக்குகிறோமோ அவ்வளவுக்குத் தானும் சிறியதாகுவதேயாகும்.

அப்பொழுது δx ஆனது போதுமான சிறிய பரிமாணமானால், அதற்கு ஒத்த δy என்னும் ஏற்றமானது தோராயமாக $\delta y = A \delta x$ எனத் தொடர்புறும். A ஆனது P என்னும் புள்ளியிடத்தில் அறியும் வகையீட்டுக் குணகத்தின் மதிப்பே யாதலின், இத் தொடர்பை,

$$\delta y = f'(x) \delta x \quad (\delta x \text{ மிகச் சிறியதாகுங்கால்}) \quad \ldots \quad (4)$$

என்னும் சூத்திர வடிவில் இடலாம்.

(4)-வது சூத்திரமானது பின்வருமாறும் பெறப்படும் :

δx, δy என்பன ஏற்புடைய ஏற்றங்களாமாகில்,

$\lim\limits_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta y}{\delta x} = f'(x)$ என்றுதலை யறிவோம். எல்லை மதிப்பை நாடுவதற்குமுன் (δx, δy என்பன மிகச் சிறியனவாகுங்கால்)

$\frac{\delta y}{\delta x} = f'(x)$ தோராயமாக இருத்தலைப் பெறவேண்டும். இத்தோராயமானது, δx சிறியதாகுங்காலத்தில் சிறந்ததாகக் காணப்படுகிறது.

(4) **பிழைகளும் தோராயங்களும் :**

δx ஆனது x-ல் ஏற்படும் மிகச் சிறிய வேறுபாடோ அல்லது பிழையோ ஆனால், δy ஆனது அதற்கேற்ப உண்டாகிய வேறுபாடோ அல்லது பிழையோ ஆகும்.

4-லிருந்து y-ன் ஏற்றம் அல்லது பிழை $= \frac{dy}{dx}$ மடங்கு x-ன் ஏற்றம் அல்லது பிழையாகுமெனக் காண்கின்றோம்.

4-வது சூத்திரமானது சார்பற்ற மாறியைப் பொறுத்து ஒரு சார்பில் உண்டாகும் மதிப்பு மாறுபாட்டைத் தோராயமாகக் கிடைக்கப்பெறுதற்கு உதவுவதாகின்றது அல்லது அளவையில் ஏற்பட்ட பிழையின் காரணமாக ஒரு விளைவில் (பலனில்) நிகழக் கூடிய பிழையைக் கணக்கிடுவதற்குப் பயன்படுவதாகின்றது.

(5) சார்புடைய பிழை (Relative error) :

ஒரு பலனில் தனிப்பட்ட பிழையானது (absolute error) தானே தனிப்பட்ட ஒரு சிறப்புத் தன்மையைச் சுட்டுவதில்லை. பொதுவாகச் சார்புடைய அல்லது விகிதாசாரமான (விகிதசமமான) (proportionate) பிழையே உண்மையான பிழையைவிட முக்கியத் துவம் வாய்ந்ததாகும்.

x-ல் விகித சமமான அல்லது சார்புடை பிழையானது $\frac{\delta x}{x}$ ஆகும்.

(6) சதவீதப் பிழை (Percentage error) :

$\frac{100\,\delta x}{x}$ என்பது x-ல் நேர்ந்த சதவீதப் பிழையெனப்படும்.

விளக்க உதாரணங்கள்

(1) $y = x^3$ ஆனால் x ஆனது x-லிருந்து $x+\delta x$-க்கு மாறு படும்பொழுது y-ல் நேரும் தோராய மாற்றத்தைக் காண்க.

$$\delta y = \frac{dy}{dx}\,\delta x = 3x^2\,\delta x$$

குறிப்பு : உண்மையான மாறுபாடு $(x+\delta x)^3 - x^3 = 3x^2(x\delta) + 3x(\delta x)^2 + (\delta x)^3$ ஆகும். $\delta x \to 0$ ஆகுமிடத்து, நிறுத் தப்பட்ட முதலுறுப்போடு ஒப்பிட்டு நோக்க இரண்டாம் உறுப்பும், சிறப்பிலவாகிக் கழிவுண்ணுமென்க.

(2) ஒரு கோளத்தின் ஆரம் 6 செ.மீ. எனக் கொள்ளப் பட்டது. ஆரத்தை அளக்குங் காலத்தில் ·04 செ.மீ. பிழை யேற்பட்டால், கனபரிமாணத்தில் அதற்கேற்ப உண்டாகிய பிழையைத் தோராயமாகக் கண்டறிக. சதவீத மதிப்பையும் காண்க.

r ஆரமுடைய கோளத்தின் கனபரிமாணம் v எனக் கொள்க. அப்பொழுது $v = 4\pi r^3/3$ ஆகும்.

ஆரத்தை அளப்பதில் நேர்ந்த சிறிய பிழை δr ஆகவும், அதையொட்டிக் கனபரிமாணத்தைக் கணக்கிடுவதில் விளைந்த பிழை δv ஆகவுங் கொண்டால்,

$$\delta v = \frac{du}{dr} \cdot \delta r \text{ ஆகும்.}$$

இப்பொழுது $\frac{dv}{dr} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 = 4\pi r^2$

$$(\because \delta r = 4\pi r^2 \delta r)$$

இங்கு $r = 6$ செ.மீ. என்றும், $\delta r = \cdot 04$ செ.மீ. என்றும் புகுத்தும்பொழுது, நாம் பெறவேண்டிய பிழை

$$\delta v = 4\pi \times 36 \times \cdot 04 = 5.76\pi \text{ ஆகும்.}$$

$\therefore$ கன பரிமாணத்தைக் கணக்கிடுவதில் விளைந்த பிழை $5\cdot 76\pi$ கன செ.மீ. ஆகும்.

இதையொட்டி சதவீதப் பிழை

$$= 100 \frac{\delta v}{v}$$

$$= \frac{5\cdot 76\pi}{4\pi(6)^3/3} \times 100\,\% \text{ ஆகும்.}$$

$$= 2\% \text{ ஆகும்.}$$

பயிற்சி 3.2

1. 40″ பக்கமுள்ள சதுரத் தகடொன்று காய்ச்சப்படுங்கால் ஒரே மாதிரியாக விரிவுறுகின்றது. ஒவ்வொரு பக்கமும் .03″ நீண்டவிடத்து அதன் பரப்பளவில் நேர்ந்த ஏற்றத்தை யறிக.

2. 5″ கனமுள்ள கனசதுரப் பொருளொன்று காய்ச்சப்படுகின்றது. அதன் ஒவ்வொரு பக்கமும் .05″ நீண்டவிடத்து அதன் கனபரிமாணத்தில் நேர்ந்த மிகுதிப்பாட்டைக் கணக்கிடுக.

3. உட்புறவிட்டம் 10″-ம் கனம் .02″-ம் உடையதொரு கோளவடிவாகிய வெடிகுண்டின் தோராய கனபரிமாணத்தைக் காண்க.

4. மதிப்பைத் தோராயமாகக் கண்டறிக :

(i) $(2.001)^5 - 2^5$ (ii) $(0.9999)^4$

(iii) $2x^3 - 2x^2 + 4x^5$, $x = 2.001$ ஆகும் பொழுது.

(iv) $\frac{1}{4.001}$ (v) $\sqrt[3]{101}$, $\sqrt[3]{100} = 4.6416$ ஆனால்.

5. ஒரு கோளத்தின் விட்டத்தை அளப்பதில் 1000-க்கு 1 பிழையேற்பட்டது. அதன் (i) மேற்புறப் பரப்பு (ii) கன பரிமாணம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுவதில் நேரும் சதவீதப் பிழையைக் கணித்தறிக.

6. ஒரு வட்டத்தின் ஆரத்தை அளக்குங்கால் 2% பிழை யேற்பட்டது. அதன் (i) சுற்றளவு (ii) பரப்பளவு ஆகிய வற்றைக் கணக்கிடுவதில் நேரும் சதவீதப் பிழையைக் கண்டறிக.

7. (a) தோராயமாகக் கணித்தறிக :

(i) $\sin 29° 50'$ (ii) $\tan 60° 12'$

(iii) $\cos 135° 2'$, $1° = .01745$ ஆரனுல்.

(b) $\theta = 45° 6'$ கோணமானது நிமிட சுத்தமாக அளக்கப்படுமிடத்து, $\cos\theta$-ன் மதிப்பால் நேரக் கூடிய மீப்பெரு (அதிகபட்ச) பிழை யாது ?

8. அடிவாரத்திலிருந்து $400'$ தள்ளியிருந்து நோக்கும் பொழுது ஒரு கோபுரத்தின் ஏற்றக் கோணம் $30°$ ஆகும். ஏற்றக் கோணத்தைக் கண்டறிதலில் $5'$ பிழை ஏற்படுமானால், அதன் உண்மை உயரத்தில் நேரும் தோராய பிழையைக் கணித்தறிக.

9. ஒரு முக்கோணத்தின் கோணம் A ஆனது அளக்கு மிடத்து $63°$ ஆக இருந்தது. முக்கோணத்தின் பரப்பு $\frac{1}{2} bc \sin A$ என்னுஞ் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கணிக்கப்பட்டது. கோணம் A ஐ அளப்பதில் $1°$ பிழை ஏற்பட்டிருக்கக் கூடு மானால், கணக்கிட்ட பரப்பில் உண்டாயிருக்கக் கூடிய தோராய பிழையைக் கண்டறிக.

10. ஒரு கொடுக்கப்பட்ட உலோகமானது உருக்கி $10''$ உயரமும் $4''$ ஆரமுள்ள கூம்பு வடிவமாக வார்க்கப்பட்டது.

அதன் உயரம் $\frac{1}{10}''$ சிறியதாகுமானுல், அதன் ஆரம் என்னுகும்?

11. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கம் C ஆனது

$$C^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

என்னும் சூத்திரத்தைக் கொண்டு கணக்கிடப்பட்டது. C ஐக் கணக்கிடுதலில் 2% சதவீதப் பிழை நேர்ந்ததானுல், அதை யொட்டி (i) C-ன் மதிப்பிலும், (ii) a-ன் மதிப்பிலும் நேரக்கூடிய பிழைகளைக் கணித்தறிக.

12. வகை கெழு வழியாகப் பின்வருபவற்றின் மூலத்தைத் தோராயமாக மதிப்பிடுக :

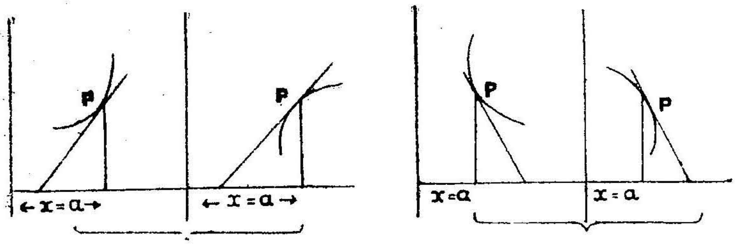
(i) $x^2 - 3x - 6 = 0$ (ii) $x^5 + 3x - 10 = 0$.

3.3. வகையீட்டுக் குணகத்தின் குறி : மிகுதலும் குறைதலும் உடைய சார்புகள் (Sign of differential coefficient : increasing and decreasing functions)

(1) x-ல் δx என்னும் சிறிய ஏற்றம் உண்டானபொழுது $x=a$ யிலிருந்து $f(x)$- க்கு இயற்கணித வகையில் அதிகப்படியான மதிப்பு வாய்க்குமேயானுல், $x = a$ என்னுமிடத்தில் $f(x)$ என்னும் சார்பு வளருஞ் சார்பாமெனக் கருதப்படும். அதாவது $f(a + \delta x) > f(x)$. δx ஆனது சிறியதாயும், மிகை இராசியாகவுமிருந்தால், வரைபட வகையில் P என்னும் புள்ளியானது $x = a$ என்னும் புள்ளி வழியாக இடமிருந்து வலம் நோக்கிச் செல்லும்போது வளை வரையானது எழுச்சியுடையதாகக் காணப்படும்.

வரைபடம் 4-ல் இருந்து δx ஆனது குறைவுறுமானுல் (δx குறை இராசி), $f(x)$-ன் மதிப்பானது $f(a)$-லிருந்து குறைவுறுவதாகக் காணப்படும். $x = a$ என்னுமிடத்தில் உள்ள தொடு கோடானது X அச்சுடன் θ குறுங்கோணம் உண்டாக்கும்பொழுதுதான் இது நேருமெனவுங் காணக்கூடும். ஆகவே, $x = a$ என்னுமிடத்தில் வகை கெழு $f'(x)$ ஆனது மிகை இராசியாகுமானுல், இப்புள்ளி யிடத்தில் $f(x)$ ஆனது வளரும் சார்பாகும் எனக் கூறுகிறேும். இதன் கருத்தாவது x வளரும்பொழுது $f(x)$ வளருகின்றதென் பதும், x குறையும்பொழுது $f(x)$ குறைகின்றதென்பதும் ஆகும். மற்றப்படி, $f'(a)$ ஆனது குறை இராசியாகுமானுல், a என்னும் மதிப்பிலிருந்து தொடங்கி x பெருகுமிடத்து $f(x)$ ஆனது குறை வுறும் என்றும், x குறைவுறும்பொழுது $f(x)$ வளரும் என்றும்

உணருகிறோம். இவ்வகையில், வளைவரையின் சரிவு குறை இராசி யாகும். அதாவது தொடு கோடானது X அச்சுடன் விரிகோணம் அமைய நிற்கின்றதாகும்.



படம் 4.

(2) இப்பலன்கள் யாவும் $\delta y = [f'(x) + \alpha]\, \delta x$ என்பதி லிருந்தும் பெறலாகும். δx ஐப் போதிய அளவு சிறியதாகக் கொள்ளுவதனுல் α ஐ எண்மானத்தில் $f'(x)$ ஐ விடக் குறைந்த தாகலாம். ஆகவே,

$f'(x)$ மிகை இராசியானுல் δx-ம் δy-ம் ஓர் இராசிக் குறியைப் பெறும்.

$f'(x)$ குறை இராசியானுல் δx-ம் δy-ம் மாறுபடு இராசிக் குறியைப் பெறும். இவற்ருன், வகையீட்டுக் குணகம் மிகை இராசியானுல் x பெருகும்பொழுது y-ம் பெருகும்; வகையீட்டுக் குணகம் குறை இராசியானுல், x பெருகுங்கால் y சுருங்கும்.

(3) $a \angle x \angle b$ என்னும் இடைவெளியிலுள்ள எல்லாப் புள்ளி யிடத்தும் $f'(x)$ ஆனது மிகை இராசியாகும்பொழுது, (a, b) என்னும் இடைவெளியில் $f(x)$ ஆனது வளரும் அல்லது பெருகுஞ் சார்பாகுமெனக் கூறுகிறோம். $f'(x) = 2x - 6$ ஆனது $(4,5)$ என்னும் இடைவெளியிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கண்ணும் மிகை இராசியாகவே இருத்தலின், $x^2 6x$ஐ (a, b) என்னும் இடை வெளியில் பெருகும் x-ன் சார்பாகுமெனக் கொள்ளக்கிடக்கின்றது. ஆனல், $(1,2)$ என்னும் இடைவெளியிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளி யிடத்திலும் $f'(x)$ குறை இராசியாதலின், அவ்விடைவெளியில் $f(x)$ ஆனது x-ன் குறையுஞ் சார்பாகுமெனக் கருதக்கிடக்கின்றது. அது $(2, 5)$ என்னும் இடைவெளியில் சில சமயங்களில் பெருகுவ தாகவும், சில சமயங்களில் குறைவுறுவதாகவும் இருக்கும்.

(a, b) என்னும் இடைவெளியில் x-ன் சார்பாகிய $f(x)$ என்பது வளருமுகத்திலிருந்தால் $f(b) > f(a)$ ஆகும்; அச் சார்பு குறை வுறும் தன்மையிலிருந்தால் $f(b) < f(a)$ ஆகும்.

(4) சார்புகளுடைய கண நிலைப் பெறுமானங்கள் (Stationary values of functions) :

$f'(x) = 0$ ஆகுமிடத்து x பெறும் மதிப்பைப் பொறுத்த வகையில் வளரும் சார்பு, குறையும் சார்பெனக் கொண்டவற்றைப் பற்றிய முடிபுகளெல்லாம் பொருந்தாதனவாகப்போகும். $f'(x)$ ஆனது சார்பினது மாறுவீதத்தை அளத்தலால், $f'(x) = 0$ ஆகுமிடத்துச் சார்பானது பெறக்கிடைக்கும் மதிப்புகளெல்லாம் கண நிலைப் பெறுமானங்கள் எனப்படும். P என்னுமிடத்தில் $f'(x) = 0$ ஆனல், P என்னுமிடத்தில் வளைவரைக்கு அமையுந் தொடுகோடானது X அச்சுக்கு ஒரு போகாகும்.

பயிற்சி 3.3

1. $x = 0$ ஆகுமிடத்து $x^3 + 1$ என்னுஞ் சார்பு ஆனது ஒரு பரிமாணத்தை யுடையதாகுமெனவும், x-ன் பிறவாகிய முடிவுள்ள மதிப்புகளுக்கெல்லாம் அது வளருஞ் சார்பாகுமெனவுங் காட்டுக.

2. $y = x^3 - 3x^2 + 5x + 4$ ஆனது x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் வளருந் தன்மையதாகுமெனக் காட்டுக.

3. $x = 0$ ஆகுமிடந் தவிர, x-ன் மதிப்பு வளரும்பொழுதெல்லாம் $\frac{4}{x^3} - \frac{18}{x^2} + \frac{27}{x}$ என்னும் சார்பு குறைமுகத்ததாகுமெனக் காட்டுக.

4. பின்வருஞ் சார்புகள் x-ன் மதிப்புகளுள் எந்த இடைவெளியில் வளருவன அல்லது தேய்வனவாகுமெனக் கண்டறிக :

(i) $3x^2 - 5x - 1$ (ii) $2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$

(iii) $x^4 - 12x^3 + 28x^2 - 20$.

5. x ஆனது 2-க்கு மேற்பட்ட மதிப்புகளையேற்குமிடத்தெல்லாம் $4x^3 + 6x^2 - 72x + 9$ ஆனது வளர்முகச் சார்பாகுமெனக் காட்டுக. மற்றைய எவ் விடைவெளி மதிப்புகளில் அச்சார்பு வளருவதாகும் ?

6. θ-ன் மதிப்பு $45°$-லிருந்து $90°$ வரையிலுள்ள பொழுது θ-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $\sin\theta + \cos\theta$ ஆனது குறையுஞ் சார்பாகுமென நிரூபிக்க.

7. $\theta = 0$ அல்லது $2n\pi$ ஒழிந்த மதிப்புகளை யெல்லாம் θ ஆனது எய்துமிடத்து $\sin\theta - \theta$ தேயுஞ் சார்பாகுமென நிரூபிக்க.

8. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ என்னும் இடைவெளியில் $\frac{\sin\theta}{\theta}$ ஆனது தேய்முகச் சார்பாகுமெனக் காட்டுக. ஆகவே,

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}\text{-க்கு } \theta > \sin\theta > \frac{2\theta}{\pi}$$ ஆகும் எனக் காட்டுக.

9. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ என்னும் இடைவெளியில் $\tan\theta/\theta$ ஆனது வளர்முகச் சார்பாகுமென நிரூபிக்க.

10. x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $1 - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \cos x \leqslant 1$ ஆகுமென நிரூபிக்க.

11. x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $\sin x$ ஆனது x-க்கும் $x - \frac{1}{6}x^3$-க்கும் இடைப்பட்டுக்கிடக்குமென நிரூபிக்க.

12. x ஆனது $-\infty$-லிருந்து $+\infty$-க்குப் பெருகுங் காலத்தில், $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d$ ஆனது வளர்முகச் சார்பாவதற்கு வேண்டிய நிபந்தனையைக் கண்டறிக.

13. ஒரே வரைபடத்தில் $y = 5 - 4x$-க்கும், அதன் $f'(x)$-க்கும் உரிய வளைவரைகளையமைத்து உன்னுடைய அனுமானங்களைக் கூறுக.

x என்னும் யாதேனுமொரு புள்ளியிடத்தில் $y = 6x + 3x^2 + x^3$ என்னும் வளைவரையின் சரிவுத் தகவைக் கண்டறிக. மேலும் x பெறும் ஒவ்வோர் உண்மை மதிப்புக்கும் y ஆனது வளர் முகச் சார்பாதலையும் நிரூபிக்க.

3.4. ஒற்றை மாறியை உடைய சார்பினது மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகள் (Maxima and Minima of a function of a single variable)

(1) $y = f(x)$ ஆனது x மாறியைப் பொறுத்து ஒற்றை மதிப்பையுடைய சார்பாகுமெனக் கொள்வோம். ஒரு வரைபடத்தின் உதவியைக் கொண்டு அதற்குரிய மதிப்புகளின் மாறுதல்களைக் காண்போம்.

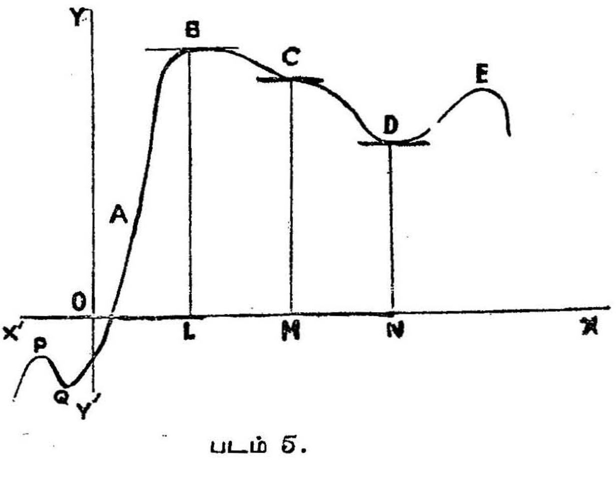
விவரணம் : $x = a$ என்னும் புள்ளியினது அண்டை நிலைமை யாவது (neighbourhood), ϵ என்பது சிறிய மிகை இராசி யெண்ணைக் குறிடத்து அமையும் $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ என்னும் வடிவு டைய இடைவெளியாகும்.

ஒரு சார்பின் மீப்பெரு மதிப்பாவது இரு மருங்கினும் அணுகி யுள்ள சார்பின் மதிப்புகள் அனைத்தினும் மிக்கதாவதாகும்.

ஒரு சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பாவது இரு மருங்கினும் அணுகி யுள்ள சார்பின் மதிப்புகள் அனைத்தினுக்கும் குறைந்ததாகும்.

(2) மீப்பெரு மதிப்பு விளங்கும் புள்ளியிடம் (Maximum point) :

x பெருகுங்கால் சார்பு y-ஆனது முதலில் A-லிருந்து B-க்குச் செல்லுழி வளருவதாகவும், B-லிருந்து C-க்குச் செல்லுழி குறை வதாகவும், $x=b$-க்கு ஏற்புடைய B_2 என்னும் புள்ளிக்கண் உள்ள மதிப்பானது $x = b$ என்னும் நிலைமைக்கு இரு அண்டைப் பக்கங் களிலும் சார்புக்குண்டாகும் மதிப்புகள் யாவையினும் மிகுந்து இருப்பதாகவும் கொள்ளுவோம் (படம் 5). அந்நிலையில் $f(b)$ ஆனது மீப்பெரு மதிப்பு எனப்படும். அது படத்தில் BL என்னும்



படம் 5.

நிலைத்தூரத்தில் காட்டப்படுகின்றது. ஆகவே, ஒரு சார்பானது $x = b$ ஆகும் நிலைமைக்கண் மீப்பெரு மதிப்பு எய்துவதாயின், அது $x = b$ வரையில் வளரும் முகத்ததாகவும், $x = b$-க்குப் பின் குறையுந் தன்மைய தாகவும் விளங்கக் காண்கிறோம். ஆகவே,

x-ஆனது $x = b$ மதிப்பின் வழியே பெருகும் நிலைமையதானுல், $\frac{dy}{dx}$-ஆனது தனது குறியை மீப்பெரு மதிப்பு விளங்கும் புள்ளியின் அண்டைப்பக்கங்களில் மிகை இராசிக்குறியிலிருந்து குறை இராசிக் குறிக்கு மாற்றிக் கொள்ளும் தன்மையதாகும். B என்னுமிடத்தில் சார்பின் மீப்பெரு மதிப்பு கண்ணுற்று நிற்றலால், அவ்விடத்தில் வகை கெழுவின் மதிப்புப் பூச்சியமாகும். இது தொடர்ச்சி யிடையறவு படாத சார்புக்கே பொருந்தும்.

[மேற்குறித்த செய்திகள் பிறவாற்றுனும் கண்டறியப்படும்: A-க்கும் B-க்கும் இடையிலுள்ள யாதேனுமொரு புள்ளியிடத்தில் வளைவரைக்கு அமைக்கப்படுந் தொடுகோடானது X அச்சோடு அதன் மிகை இராசித்திசையில் ஒரு குறுங்கோணத்தை ஏற்படுத்திக்கொள்ளும். ஆகவே $\tan\theta$ மிகை இராசியாகும்; அதாவது $\frac{dy}{dx}$ ஆனது மிகை இராசிக் குறியைக் கொள்ளும். ஆனுல், B-க்கும், C-க்கும் இடையிலுள்ள எப்புள்ளியிடத்தேனும் அமைக்கப்படும் தொடுகோடானது X அச்சுடன் விரிகோணம் அமையக்கொண்டே விளங்கும். ஒரு விரிகோணத்தின் இருக்கை (tangent) குறை இராசியேயாகுமாதலின், $\frac{dy}{dx}$-ம் குறை இராசிக்குறியுடையதாகும். B என்னுமிடத்தில் மட்டும் அத் தொடுகோடானது X அச்சுக்கு ஒரு போகாய் அமைதலின், அந்நிலையில் $\frac{dy}{dx}$ பூச்சியமாகும்.]

(3) மீச்சிறு மதிப்பு அமையும் புள்ளியிடம் (Minimum point):

$x = d$ என்னும் மதிப்புள்ள D என்னும் புள்ளியிடத்தில் நிறுத்திய நிலைத் தூரமானது, அதற்கு நெருங்கியதாய் அண்டைப் பக்கங்களில் உள்ள புள்ளியிடங்களில் நிற்கப்பெறும் மற்றெந்த நிலைத் தூரத்தையும் விட நீளம் குறைவுள்ளதாக இருப்பதாகக் கண்ணுறப்படுதலின், அப்புள்ளியிடத்தில் சார்புக்குரிய மீச்சிறு மதிப்பு விளங்குவதாகும். [மேற்கூறியவாறு வாதிக்குங்கால், $\frac{dy}{dx}$ ஆனது குறை இராசியிலிருந்து மிகை இராசிக்குத் தனது குறியை மாற்றிக் கொள்ளுகின்றதாகுமென்றும், D இடத்தில் மட்டும் $\frac{dy}{dx} = 0$ ஆகுமென்றும், அவ்விடத்தில் அமைவுறுந் தொடுகோடானது X அச்சுக்கு ஒரு போகாக விளங்குமெனவும் பெறப்படுகின்றன.]

(4) வரைபடத்தை நோக்குமிடத்து P, B, E என்பன மீப்பெரு மதிப்புகள் விளங்குமிடங்களாகவும், Q, D என்பன மீச்சிறு மதிப்புகள் அமையுமிடங்களாகவும் காணப்படும். இதனுல், ஒரு சார்பானது பல மீச்சிறு, மீப்பெரு மதிப்புகளைப் பெறக் கூடுமெனத் தெரிகின்றது. மீச்சிறு மதிப்பு எனின் ஒரு சார்பு பெறக்கிடைக்கும் மதிப்புகள் யாவற்றிற்கும் மிகக் குறைந்த மதிப்பாகு மென்பது பொருளல்ல. இஃது மீப்பெரு மதிப்புக்கும் ஒக்கும். PD என்னும் புள்ளிகளைக் காணுமிடத்து அவற்றின்கண் சார்பு அடையும் மதிப்பு குறை இராசியாதலை அறிகின்ருேம். இதனுன், மீப்பெரு மதிப்பு என்பதொன்று குறை இராசியாகவும் இருக்கலாம் என்பது போதரும். இவ்வாறறியவே, ஒரு மீச்சிறிய மதிப்பானது ஒரு மீப்பெருமதிப்பினும் மிக்கிருக்கலாம் என்பது பெறப்படும். இதற்குக் காரணம் வரையிடத்து அமையும் வளைவு நிலைமைகளேயாம் என்க.

ஒரு வளைவரையில் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்பமையும் புள்ளிகள் திருப்பப் புள்ளிகள் (turning points) எனப்படும்.

(5) வளைவு மாற்றப் புள்ளி (point of inflexion): வளைவரையைத் தொடுகோடு கடந்து செல்லும் இடத்துள்ள புள்ளிகள் வளைவு மாற்றப் புள்ளிகள் எனப்படும். அத்தகைய புள்ளிக்கண் வரையின் மேல் நோக்கிய குழிவுப் பாகம் கீழ் நோக்கியோ, இந்நிலை மறுதலையாகவோ மாறுபடும் நிலைமை தோன்றும். C என்னும் வளைவு மாற்றப் புள்ளிக்கண் அமைந்துள்ளது போலத் தொடுகோடானது கிடை நிலையில் (horizontal) உள்ளதாகவும் இருக்கலாம். $x = C$ (C-ன் அச்சுத் தூரம்) வழியாக x-ஆனது அதிகரிக்குங்கால் $\frac{dy}{dx}$ ஆனது C-க்கு முன்னே குறை இராசியாக இருந்து, வரவரப் பெருகி C இடத்தில் O ஆகி, மறுபடியும் குறையத் தொடங்கிக் குறை இராசியாகின்றது. இதனுல், x-ஆனது $x = C$ என்னும் மதிப்பின் ஊடாக வளருங்காலத்தில், வகைகெழுவானது இராசிக்குறியில் மாறுதலின்றியே பூச்சியமாகின்றது. C ஐப் போன்ற புள்ளியிடங்களில், சார்பானது மீச்சிறு மதிப்பையேனும், மீப்பெரு மதிப்பையேனும் அடைவதில்லை. ஆனுல், ஒரு வளைவு மாற்றப் புள்ளியையே பெறுவதாகச் சொல்லப்படுகின்றது.

(6) மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளைக் காணுதற்கேற்ற சோதனைகள் (Tests for Maxima and Minima):

வளைவரையில் $\frac{dy}{dx}$ ஆனது பூச்சியமாகுமிடத்துள்ள புள்ளிகள் திசைமாரு அல்லது கணநிலைப் புள்ளிகள் (stationary)

எனப்படும். நாம் முன்னே அறிந்தபடி, ஒவ்வொரு கணநிலைப் புள்ளியும் திசைமாற்றப் புள்ளியாகவேண்டிய நியமமில்லை. ஆனால் ஒவ்வொரு திசைமாற்றப் புள்ளியும் கணநிலைப் புள்ளியாகும் நியமத்திற்குள்ளாகும். கணநிலைப் புள்ளிகளின் இனத்திலே வளைவு மாற்றப் புள்ளிகளும் சேரும். ஆகவே, ஒரு சார்பின் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளைக் கண்டறியப் பின்வரும் முறையைக் கையாளுகின்றோம் :

$f'(x)=0$-க்கு வாய்ப்ப ஒரு மாறியானது பெறத்தகு மதிப்புகளைக் காண ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் பின்வரும் சோதனைகளுளொன்றனைப் பயன்படுத்துகின்றோம்.

முதற் சோதனை : $x=a$ என்பதொரு கணநிலைப் புள்ளியாகட்டும். h என்பது மிகச் சிறியதொரு மிகை இராசிப் பரிமாணமானால், $f(a-h)$ ஐயும் $f(a+h)$ ஐயும் கணக்கிடுக. இவ்வொவ்வொரு மதிப்பையும் விட $f(a)$ ஆனது மிகுந்திருக்குமானால், அப்பொழுது மீப்பெரு மதிப்பு உண்டாதற்கு வாய்ப்புளதாகும். அங்ஙனமின்றிக் குறைந்திருக்குமானால் மீச்சிறு மதிப்பு உளதாதற்கு இடமுண்டு.

இரண்டாஞ் சோதனை : $x=a$ என்பதொரு கணநிலைப் புள்ளியாகட்டும். $f'(a-h)$ஐயும் $f'(a+h)$ ஐயும் கணக்கிடுக. வகை கெழுவானது மிகை இராசிக்குறியிலிருந்து குறை இராசிக்குறிக்கு மாறப் பெறுமானால், சார்பானது $x=a$ என்னும் மதிப்புக்கு மீப்பெரு மதிப்புப் பெறும் நிலைமைத்தாகும். அவ்வாறன்றிக் குறை இராசிக்குறியிலிருந்து மிகை இராசிக்குறிக்கு மாறும் நிலைமைத்தானால், $x=a$ என்னும் மதிப்பிடத்தில் சார்புக்கு மீச்சிறு மதிப்பு வாய்க்க வழி உண்டாகும்.

x ஆனது a மதிப்பினூடே பெருகுங் காலத்தில் $f'(x)$ ஆனது இராசிக் குறியில் மாற்றம் பெறுதாயின், அதாவது $f'(a-h)$-ம் $f'(a+h)$-ம் ஒத்த இராசிக்குறியுடையனவானால், அப்பொழுது $f'(x)$ ஆனது $x=a$ என்னுமிடத்தில் மீப்பெரு மதிப்பையேனும் மீச்சிறு மதிப்பையேனும் பெறுததாகும்.

[குறிப்பு : கணநிலைப் புள்ளியைப் பொறுத்தமட்டில் மேற்கூறிய சோதனைகளுள் ஒன்றனைப் பயன்படுத்துங்கால், சோதனைக்கு எடுத்துக்கொண்ட $(a-h)$, $(a+h)$ என்னும் மதிப்புகளுக்கு இடையில் வேறொரு கணநிலைப் புள்ளி இடம் பெறுமையை நிச்சயித்துக்கொள்ளவேண்டும்.]

மூன்ருவது சோதனை : மீப்பெரு மதிப்பு விளங்கும் புள்ளியிடத்தில் $\frac{dy}{dx}$ ஆனது தொடர்ச்சியுறு சார்பாளுல், மீப்பெரு மதிப்பின் வழியே இடமிருந்து வலம்நோக்கிச் செல்லுங்கால் $\frac{dy}{dx}$ ஆனது $+$-லிருந்து $-$க்குக் குறிமாற்றம் பெறுவதோடு, அதன் மதிப்பு மீப்பெரு புள்ளியிடத்துப் பூச்சியமாகிவிடும். இவ்வாருக, $\frac{dy}{dx}$ ஆனது தொடர்ச்சிநிலையுடையதாயின், மீப்பெரு மதிப்பின் சூழலில் அஃதொரு குறையுறு சார்பாகும். ஆகவே, அதன் வகையீட்டுக் குணகமாகிய $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஆனது வளைவைச் சுற்றிய பகுதி யாங்ஙனம் குறை இராசியதாகும்? இது மீப்பெரு புள்ளியையும் அகப்படுத்துக் கொள்ளும். ஆகவே, சிறப்பாக மீப்பெரு புள்ளிக்கண் அது குறை இராசிக்குறியாகும்.

எதிர்நிலையாக, a ஆனது கணநிலை மதிப்பாளுல், $x = a$ யிடத்தில் $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஆனது குறை இராசியும் ஆனுல், அதாவது, $f''(a)$ ஆனது குறை இராசிக்குறியாளுல், $f'(x)$ ஆனது குறையுறு சார் பாகும். ஆனுல் a என்பது ஒரு கணநிலை மதிப்பாகும். ஆகவே, $x = a$-க்கு $f'(x)$ ஆனது பூச்சியம் மதிப்பினூடே குறையுறுவதாகும். அதாவது, $\tan\theta$ ஆனது $+$-லிருந்து $-$க்கு மாறும். வரைபடத்தின் குழிவும் கீழ்நோக்கி நிற்கும்.

ஆகவே $f''(a)$ ஆனது $-$ ஆனுல், $f(a)$ மீப்பெரு மதிப்புடையதாகும். அதுபோலவே $f''(a)$ ஆனது $+$ ஆனுல், $f(a)$ மீச்சிறு மதிப்புடையதாகும்.

இவைபற்றி மூன்ருவது சோதனையானது பின்வருமாறு தொகுத்து எழுதிக்கொள்ளப்படும் :

(i) $f'(x)$ ஐ அறிக. (ii) $f'(x) = 0$ ஐத் தீர்த்து அதன் மூலங்களைக் காண்க. இம் மூலங்கள் கணநிலை மதிப்புகளைத் தரும். (iii) $f'(x)$ ஐக் கண்டு அதில் x-க்குப் பிரதியாக a ஐ இடுக.

$f''(a)$ ஆனது குறை இராசிக்குறியாளுல், $x = a$ என்னுமிடத்தில் சார்புக்கு மீப்பெரு மதிப்புண்டாகும். அம்மதிப்பு $f(a)$ ஆகும்.

$f''(a)$ ஆனது மிகை இராசிக்குறியானல், $x = a$ என்னுமிடத்தில் சார்புக்கு மீச்சிறு மதிப்புண்டாகும். அம்மதிப்பு $f(a)$ ஆகும்.

[குறிப்பு: $f''(a)$ பூச்சியமானல் இச்சோதனை ஏற்புடையதாகாது. அந்நிலையில் முதலிரண்டு சோதனைகளுள் ஒன்றனைக் கையாளவேண்டும். எனினும், இவ்வகையில் கூட, நிரூபணமின்றி நுவலப்படுகின்ற பின்வரும் விதியைப் பயன்படுத்தலாம். இங்குத் தொடர்ந்து காணும் வகை கெழுக்கள் தொடர்ச்சி நிலையுறுவனவாகிய பொழுதுதான் இவ்விதி சாத்தியப்படுமென்க.]

இனி $f'(a) = 0$; $f''(a) = 0$; $f'''(a) = 0$; ... $f^{(k-1)}(a) = 0$ எனவும் ஆனல், $f^{k'}(a) \neq a$ என்றுங் கருதுவோம். அப்பொழுது K ஆனது ஒற்றை இராசியானல், $f(a)$ ஆனது மீப்பெரு மதிப்போ, மீச்சிறு மதிப்போ ஆகாது. ஆனல் K இரட்டை இராசியாகுங்கால், $f(a)$ ஆனது $f^k(a) \neq 0$ எனின், மீப்பெரு மதிப்பையும், $f^k(a) > 0$ எனின் மீச்சிறு மதிப்பையும் பெறும்.

குறிப்பு 1: செய்முறை சிறிது உழைப்பை வாங்குவதாயினும், அடிப்படை நிலையில் முதற் சோதனையே சிறந்ததாகும்.

இரண்டாஞ் சோதனையும் பயனுடையதாயினும் மிகவும் தொல்லை விளைப்பதாகும்.

மூன்ருஞ் சோதனையோவெனின், பொதுவாக மிக எளியதும் பயன்பாடுடையதாகவும் உள்ளதாகும்.

குறிப்பு 2: மீப்பெரு மதிப்பையும், மீச்சிறு மதிப்பையும் கண்டறியும் வகையைத் தெளிவுபடுத்திக் கொள்ளுந் திறத்திற்கு மேற்கூறிய மூவகைச் சோதனைகளின் சாரம் ஈங்குத் தரப்படுகின்றன:

	மீப்பெரு மதிப்புள்ள புள்ளி	மீச்சிறு மதிப்புள்ள புள்ளி	வளைவு மாற்றப் புள்ளி (Point of inflexion)
$y=f(x)$	1. முன்னே பெருகுவது 2. பின்னே குறுகுவது	1. முன்னே குறுகுவது 2. பின்னே பெருகுவது	குழிவு மேலிருந்து கீழ்நோக்கியோ, கீழிருந்து மேல் நோக்கியோ திருப்பமுறுவது

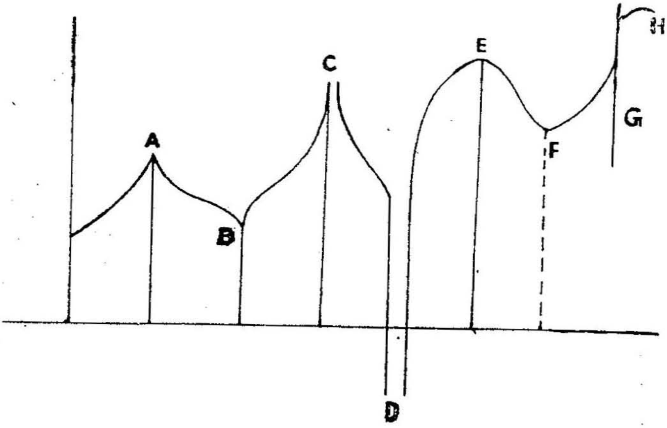
	மீப்பெரு மதிப்புள்ள புள்ளி	மீச்சிறு மதிப்புள்ள புள்ளி	வளைவு மாற்றப் புள்ளி (Point of inflexion)
$\frac{dy}{dx}$	1. முன்னே மிகை இராசி 2. பின்னே குறை இராசி 3. புள்ளியிடத்தில் பூச்சியத்திற்குச் சமமாதல். ∴ குறைவுறுதல்	1. முன்னே குறை இராசி 2. பின்னே மிகை இராசி 3. புள்ளியிடத்தில் பூச்சியமாதல். ஆகவே பெருகுதல்	1. புள்ளியிடத்தில் பூச்சியமாதல் 2. முன்னும் பின்னும் ஒரே குறியையுடையதாதல்
$\frac{d^2y}{dx^2}$	குறை இராசி	மிகை இராசி	பூச்சியம்

குறிப்பு 3. எவ்விடத்தும் தொடர்ச்சியுறுவதாய். கணநிலைப் புள்ளிகள் பெருததாய் உள்ளதொரு சார்பைப்பற்றிய வகையில் மீப்பெறு, மீச்சிறு மதிப்புகள் அடுத்தடுத்து வரும்.

7. $f(x)$ அல்லது $f'(x)$ தொடர்ச்சியுருத பொழுது :

$f(x)$-ன் மிகவுயர்ந்த மதிப்புகளும் மிகக் குறைந்த மதிப்புகளும் $f(x)$ அல்லது $f'(x)$ தொடர்ச்சிபெருத புள்ளியிடங்களிலும் காணப் படுமென்பது குறிப்பிடத்தக்கதாகும். இது சாத்தியமாகக் கூடியதாகுமென்னுந் தன்மையினைப் படம் 6-லிருந்து காணலாம். A-ம் B-ம் ஆகிய புள்ளியிடங்களில் $\frac{dy}{dx}$ ஆனது முடிவிலதாயினும், y ஆனது முடிவுறுவதாகவும் தொடர்ச்சியுடையதாகவும் உள்ளனது. C, D என்னும் புள்ளியிடங்களில் $\frac{dy}{dx}$-ம் y-ம் முடிவிலதாகும். ஆனால், E, F என்னும் புள்ளியிடங்களில் $f'(x)$ ஆனது திடீரென்று முடிவுள்ளதோர் அளவால் மாறுபடுகிறது. இது தொடுகோடானது புள்ளியின் ஒரு பக்கத்திலிருந்து மற்றொரு பக்கத்திற்குச் செல்லுகின்றதனுல் ஏற்படுவதாகும். இத்தன்மையால்

$f'(x)$ ஆனது தொடர்ச்சியற்றதாயினும், y-ஆனது முடிவுறுவதாகவும் தொடர்ச்சியுறுவதாகவும் உள்ளது.



படம் 6.

H என்னுமிடத்தில் வளைவரையானது திடீரென்று நிறுத்தமுறுகிறது. அதனால் y-ஆனது தொடர்ச்சியறுகிறது. எனினும், இவ்வகைகள் ஒவ்வொன்றினும் y-ஆனது மீப்பெரு மதிப்பையோ, மீச்சிறு மதிப்பையோ யுடையதாகும். இறுதிப் புள்ளி நீங்கலாக இவ்வகைகளில், $f'(x)$ ஆனது புள்ளியின் வழியே செல்லுங்கால் இராசிக்குறி மாற்றம் ஏற்படுவதற்கு உரிய நிபந்தனை பொருந்தப் பெறுகின்றது. A, C, E என்னும் புள்ளியிடங்களில் $+$ லிருந்து $-$ க்குக் குறி மாற்றம் பெறுகின்றது. B, D, F என்னும் புள்ளியிடங்களில் $-$ லிருந்து $+$ க்குக் குறி மாற்றம் பெறுகின்றது.

இப்புள்ளிகள் $f'(x)$ ஆனது முடிவிலி நிலைஎய்த x பெறும் மதிப்புகளைப் பெறுவதால் கிடைக்கப்படுகின்றன. [அதாவது $1/f'(x) = 0$ ஆக வேண்டும்.] பிறகு சோதனை 1 அல்லது 2 பயன் கொளப்படும். ஆனால் இவ்வகைகளில் சோதனை 3 ஏற்புடையதாகாது.

இத்தகைய முடிவுநிலைப் புள்ளிகளோடு G என்னுமிடத்தில் செங்குத்துத் தொடுகோடு நிற்கப்பெறும் வளைவு மாற்றப் புள்ளிகளும் கலந்துள்ளன என்பதைக் கவனிக்கவும்.

இங்கு G-ன் இரு பக்கங்களிலும் $\dfrac{dy}{dx}$ ஆனது ஒரே இராசிக் குறியைப் பெற்றுள்ளது. அதாவது, வகைகெழுவானது இராசிக்

குறியில் மாற்றம் பெறுமலேயே முடிவுறுததாகின்றது. இவ்வித நிகழ்ச்சியானது இத்தகைய வினைவுமாற்றப் புள்ளிகளைக் கண்டுபிடித்தற்குப் பயன்படுகின்றது.

குறிப்பு : வளைவரையின்மேல் $\frac{dy}{dx} = 0$ அல்லது ∞ ஆகும் புள்ளியிடங்களில் வளைவுமாற்றப் புள்ளிகள் உளவாதலைக்கண்டறிந்தோம். அதாவது, படம் 5-ல் C என்னும் புள்ளியிடத்தில் கிடைதளத் தொடுகோட்டுடனும், படம் 6-ல் G என்னும் புள்ளியிடத்தில் செங்குத்துத் தொடுகோட்டுடனும் இருக்கும் நிலைகளாம் என்க.

ஆனால், $\frac{dy}{dx}$ ஆனது பூச்சியமல்லாலும் முடிவிலதாகாமலும் உள்ள வளைவரையின் புள்ளியிடங்களிலும் வளைவு மாற்றப் புள்ளிகள் இருக்கக்கூடும். அத்தகு புள்ளிகள் தீர்வுகட்ட (critical) மதிப்புகளுடன் இணைவுறுமையால், அவை இங்கு எடுத்துக் கொள்ளப்படவில்லை.

விளக்க உதாரணங்கள்

$3x^4 - 4x^3 + 4$-ன் திருப்புப்புள்ளிகளைக் கண்டறிக.

செய்வகை :

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5$ என்க.

$\therefore \quad f'(x) = 12x^3 - 12x^2 + 5 = 12x^2(x-1)$

$f''(x) = 36x^2 - 24x$

இப்பொழுது $x = 0$ அல்லது 1 ஆனால் $f'(x) = 0$ ஆகும்.

$f''(1) = 36 - 24 = 12$, மிகை இராசியெண்ணாகும்.

$\therefore \quad f(1)$ ஆனது $f(x)$-ன் மீச்சிறு மதிப்பாகும்.

ஆனால், $f''(0) = 0$. இவ் வகையில், 0-க்கு அண்மையில் $f'(x)$-ன் இராசிக்குறியை அறிக.

h என்பது ஒரு சிறிய மிகை இராசிப் பரிமாணமாகட்டும்.

அப்பொழுது, $f'(h) = 12(-h)^2(-h-1) = (+)(-1)$
$= -1$

$f'(+h) = 12(h)^2(h-1) = (+)(-1) = -1$

x ஆனது 0 மதிப்பின் வழியாகப் பெருகுங்கால் $f'(x)$ ஆனது இராசிக்குறி மாறப்பெறுவதில்லை. ஆக $f(0)$ ஆனது $f(x)$-ன் திருப்ப மதிப்பல்லவென்க.

குறிப்பு: (1) $f'(x)=0$ ஆனது இரட்டைப்படை யெண்முறை திரும்பத்திரும்ப வருவதொரு மூலத்தைப் பெறும்பொழுதெல்லாம், அம் மூலத்திற்கு ஏற்புடைத்தாக ஒரு திருப்பப்புள்ளி கண்ணுறப்படும்.

(2) ஒரு நீண்ட சதுர உலோகத் தகடானது $8' \times 3'$ அளவுடையதாகும். ஒவ்வொரு மூலையிலும் ஒத்த பரப்புள்ள சதுரப் பாகங்கள் வெட்டியெறியப்பட்டன. மடித்து வாய்திறந்த நீண்ட சதுரப் பெட்டியாகச் செய்யப்பட்டது. இப் பெட்டியின் கன பரிமாணம் (கொள்ளளவு), மீப்பெரு அளவுடையதாக வேண்டுமானல், துண்டிக்கப்பட்ட சதுர பாகங்களது பக்க நீளத்தைக் கண்டறிக.

செய்வகை: ஒவ்வொரு மூலையிலுந் துண்டிக்கப்பட்ட சதுர பாகத்தின் பக்கம் x' நீளமுள்ளதாகக் கொள்ளுவோம். இது பெட்டியின் ஆழமாகும். பெட்டியின் நீள அகலங்கள் முறையே $(8-2x)$, $(3-2x)$ அடிகளாகும். பெட்டியின் கனபரிமாணம் v ஆனல்,

$$v = x(8-2x)(3-2x) \text{ கன அடியாகும்.}$$

v மீப்பெரு மதிப்புடையதாதற்குத் தக்கதாகிய x-ன் மதிப்பையறியவேண்டும்.

இப்பொழுது, $v = 4x^3 - 22x^2 + 24x$

$$\frac{dv}{dx} \; 12x^2 - 44x + 24 = 4(3x^2 - 11x + 6)$$

$$= 4(3x-2)(x-3)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 24x - 44 = 4(6x - 11)$$

திருப்பபுள்ளியாதற்கு $\frac{dv}{dx} = 0$ அதாவது, $4(3x)-2)$

$$(x-3) = 0.$$

$$\therefore \quad x = \frac{2}{3} \text{ (அல்லது) } 3.$$

இங்கு மதிப்பு 3 ஏலாததாகும் (அம்மதிப்புக்குப் பெட்டியின் அகலம் குறை இராசியாகுமாகலின்),

$\therefore$ ஏற்கத்தக்கது $\frac{2}{3}$ என்னும் மதிப்பொன்றேயாகும்.

இம்மதிப்பிற்கு $\frac{d^2 v}{dx^2}$ ஆனது குறை இராசியாகும்.

$\therefore$ $x = \frac{2}{3}$ ஆனது கனபரிமாணத்தை மீப்பெரு மதிப்புடையதாக்கும்.

$\therefore$ நீண்ட சதுரப்பெட்டியின் மீப்பெரு கொள்ளளவு $= 7\frac{11}{27}$ கன அடியாகும்.

(3) ஒரு வாய் திறந்த உருளை வடிவாகிய நீர்த்தொட்டியின் அடிப்பாகம் வட்ட வடிவமானதாய்க் குறித்த அளவு நீரைக் கொள்ளத்தக்கதாய் அமைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் ஆழமானது வட்ட முகத்தின் ஆரத்திற்குச் சமமாகுங் காலத்தில், அதற்கு ஈயம் பூசுதற்கு ஆகுஞ் செலவு மீச்சிறியதாகுமெனக் காட்டுக.

செய்வகை : நீர்த்தொட்டியின் ஆழம் h என்றும், ஆரம் r என்றுங் கொள்க. அதன் கொள்ளளவு $\pi r^2 h = C$ (ஒரு மாறிலி). ஈயப்பூச்சுக்கு உரிய பரப்பு மீச்சிறியதானால், செலவும் மீச்சிறியதாகும்.

பூச்சுக்காகும் பரப்பு $\pi r^2 + 2\pi rh = A$ (என்க). A-ன் மதிப்பை ஒரே மாறியைக் கொண்டு குறிப்பிடுவதானால்,

$$A = \pi r^2 + \frac{2C}{r} \text{ ஆகும்.}$$

பரப்பு மீச்சிறியதாகுங்கால், $\frac{dA}{dr} = 0$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{dA}{dr} = 2\pi r - \frac{2C}{r^2} = 0 \quad \therefore \quad C = \pi r^3.$$

$C = \pi r^2 h$ ஆதலின்,

$\pi r_2 h = \pi r^3$ ஆகும். அதுபற்றி $h = r$ ஆகும்.

இதனுடன், $\frac{d^2A}{dr^2} = 2\pi + \frac{4c}{r^3} = 2\pi + 4\pi = 6\pi$,

இது மிகை இராசிக்குறியாகும்.

∴ ஈயப் பூச்சுக்குரிய பரப்பு $h = r$ ஆகுமிடத்துச் செலவும் மீச்சிறியதாகும் என்க.

குறிப்பு : மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளைக் கண்டறிதற்கண் கீழ்க்கண்ட விதிகள் நமக்குப் பயன்தருவன வாகும்:

(i) மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்பைக் கண்டறிய வேண்டிய மாறியை மற்றைய மாறிகளைச் சார்த்திக் கணித சூத்திர முறையாலோ, பிற இயற்பியல் தத்துவங்களாலோ குறிப்பிடுக.

(ii) மாறிகளுக்கும் கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளுக்கும் இடையே காணப்படுந் தொடர்பினை வடிவ கணித உதவியால் ஒரே சார்பற்ற மாறியைப் பொறுத்துத் தொடர்பைக் குறிப்பிடுக.

(iii) இப்பொழுது சார்புகளின் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளைக் கண்டறிதற்குக் கூறிய விதிகளைப் பின்பற்றுக.

பயிற்சி 3.4

1. கீழ்க்கண்ட சார்புகளுக்கு மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளைக் காண்க :

(i) $x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 10$ (ii) $x(x-2)(x-3)$

(iii) $(x-1)^3(x-2)^2$ (iv) $(x-2)^3(x-3)$

(v) $(x-a)^2(x-b)^2$ (vi) $3x^5 - 5x^3$

(vii) $a\sin^2 x + b\cos^2 x\ (b > a)$

(viii) $a\cos\theta + b\sin\theta$ (ix) $\sin x + \cos^2 x$

(x) $\cos\theta\sin\theta$ (xi) $\frac{1}{3}\sin 3\theta + \sin\theta$

0 முதல் π வரையில் உள்ள இடைவெளியில்.

(xii) $2x^3 - 6x^2 + 7x + 4$

(xiii) $x^3/3 + x - \frac{4}{3}$ (xiv) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$.

(xiv) ஆவதில் சார்பின் வரைபடத்தோடு $f'(x)$, $f''(x)$-களின் வரைபடங்களையும் ஒருங்கே வரைந்து, அவற்றில் காணப்படும் மாறுபாடுகளையும் ஆராய்க.

2. $ax^2 + bx + c$ என்னும் வளைவரையானது ஒரு திருப்பப் புள்ளியைப் பெற்றுளதென்றும், a ஆனது குறை இராசியல்லாது மிகை இராசியாதற்கேற்ப மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு நிலைத் தூரத்தையோ பெற்றுள்ளதென்றுங் காட்டுக.

3. ஆதியானது (i) $y = x^4$ (ii) $y = x^3$ என்னும் வளை வரைகளில் எவ்வகையான புள்ளி நிலையாயதெனக் காண்க.

4. (i) x-ஆல் ஆகிய முப்படிச் சார்பானது ஒன்று $x = 1$-ம், $x = -\frac{3}{2}$-ம் ஆகும்பொழுது திருப்ப மதிப்புகளையும், $x = 0$ ஆகும்பொழுது மறைதலையும் பெறுவதாகின்றது. அதனைக் கண்டறிக.

(ii) ஒரு x ஆல் ஆகிய முப்படிச் சார்பானது $x = 1$ ஆகும்பொழுது மீப்பெரு மதிப்பு 4-க்குச் சமமாகவும், $x = 5$ ஆகும்பொழுது மீச்சிறு மதிப்பு -28-க்குச் சமமாகவும் இருக்கப் பெறுகின்றதெனின், அச் சார்பைக் கண்டறிக.

5. $y = x^3 + 3x^2 + 4x - 3$-க்கு மிகக் குறைந்த அளவு சாய்வு அமையக் கொள்ளுந் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டறிக.

6. அஞ்சல் நிலைய விதிப்படி ஒரு பொதியின் நீளமும் சுற்றளவும் கூடிய நீட்சி 6 அடிக்கு மேற்படாமை வேண்டும். அப்படியானால் (i) வட்ட அடிப்பாகம் (ii) சதுர அடிப்பாகம் உள்ள மீப்பெரு கனபரிமாணம் உடையனவாதற்குத் தனித்தனியே பெறக் கூடிய வகையளவு (dimension) எவ்வளவாதல் வேண்டுமெனக் கண்டறிக.

7. தனித்தனியே (i) திறந்த வாயும் (ii) மூடிய வாயும் உடையனவாகும் உருளைகளின் வகையளவுகள் எவ்விதத்தில் இருத்தல் வேண்டுமெனக் காண்க.

8. குறிப்பிட்ட தளப் பரப்பளவுள்ளதோர் ஒழுங்கான உருளையானது (i) திறந்த வாயுடையதாகவும் (ii) மூடிய வாயுடைய

தாகவும் இருந்தால், எப்பொழுது மீப்பெரு கனபரிமாணத்தைப் பெறக் கூடியதாகும்?

9. ஆரம் R ஆகவுள்ளதொரு கோளத்தின் (i) உட்புறத்தில் ஒட்டியும் (ii) வெளிப் புறத்தில் அணைந்தும் நிற்குமாறு மீப்பெரு வட்ட முகக்கூம்பு அமையுமிடத்துத் தனித்தனியே அதன் கனபரிமாணத்தைக் கண்டறிக.

10. ஒழுங்கான வட்டமுகக் கூம்பானது (i) l சாய்வு உயரமும் (ii) A வளை தளப்பரப்பும் உடையதாகுமாறுல், அதன் மீப்பெரு கொள்ளளவைக் காண்க.

11. ஒழுங்கான வட்டமுகக் கூம்பொன்று h உயரமும், அடிப்பாக ஆரம் r-ம் கொண்டுள்ளது. அதனுள் (i) மீப்பெரு கனபரிமாணமும், (ii) மீப்பெரு வளைதளப் பரப்பும் கொண்டுள்ள வட்டமுக உருளையொன்று வரையப்படுவதாயின், அதன் வகையளவுகளைக் கண்டறிக.

12. R ஆரமுள்ளதொரு கோளத்திலிருந்து (i) மீப்பெரு கன பரிமாணமும் (ii) மீப்பெரு வளைதளப் பரப்பும் கொள்வதாக அமைவுறும் உருளையின் வகையளவுகளைக் கண்டறிக.

13. ஒரு வட்டப்பகுதி (sector of circle) குறிப்பிட்ட சுற்றளவு உடையதாகும். அதன் வில்லானது ஆரத்திற்கு இரு மடங்காகும்பொழுது அதன் பரப்பு மீப்பெரு அளவினதாகுமெனக் காட்டுக. அதன் சுற்றளவைச் சார்த்தி மீப்பெரு பரப்பின் அளவைக் கண்டறிக.

14. ஒரு காகிதத்தாளானது 18 சதுர அங்குலப் பரப்புள்ள அச்சிட்ட செய்தியைப் பெற்றிருத்தல்வேண்டும். தலைமேலும், கீழடியிலும் உள்ள கரையோரம் ஒவ்வொன்றும் 2'' அகலமும், பக்கக் கரையோரம் ஒவ்வொன்றும் 1'' அகலமும் இருத்தல் வேண்டும். இங்ஙனமாதற்கு வேண்டிய மிகைக் குறைந்த அளவமைந்த தாளின் வகையளவுகளைக் கண்டறிக.

15. நீண்ட சதுர முகமுடையதோர் மரத்தூணினது தாங்குந் திறனுனது அதனது முக அகலத்தையும், ஆழத்தின் முப்படியையும் பெருக்கிய பலனுக்குத் தக்கபடி வேறுபடுமெனக் கொண்டால், d' விட்டமுள்ள மரத்துண்டிலிருந்து அதிக பட்ச (மீப்பெரு) தாங்கு திறன் உடையதாகுமாறு வெட்டியெடுக்கக்கூடிய தூணினது அகலம் யாதாகவேண்டுமெனக் கண்டறிக. அத்தாங்குதிறனுனது

அகலத்தையும் ஆழத்தின் இருபடியையும் பெருக்கிய பலனுக்கு ஏற்ப வேறுபடுமெனக் கொண்டும் இக் கணக்கைச் செய்க.

16. ஒரு சாளரமானது ஒரு நீண்ட சதுரத்தின்மேல் அரை வட்டமொன்று அமைந்த வடிவுடையதாகின்றது. குறிப்பிட்ட சுற்றளவுக்கு அச்சாளரத்தின் அகலம் அதன் கூட்டுயரத்திற்குச் சமமாயின், அது மீப்பேரளவுள்ள வெளிச்சத்தையுட்புக இடங் கொடுக்குமெனக் காட்டுக.

17. (i) கொடுத்த வட்டத்தினுள்ளே ஒட்டி நிற்குமாறு வரைக்கூடிய மீப்பெரு பரப்புள்ளதொரு செவ்வக முண்டானுல் அது ஒரு சதுரமேயாகுமெனக் காட்டி, அதன் பரப்பையும் அறிக. (ii) கொடுக்கப்பட்ட ஓர் அரைவட்டத்தினுள்ளே வரையக்கூடிய மீப்பெரு செவ்வகத்தின் பரப்பைக் கண்டறிக. (iii) கொடுத்த l அளவு நீட்சியுள்ள வேலியினுல் வளைக்கப்படக் கூடிய மீப்பெரு செவ்வகத்தின் பரப்பைக் கண்டறிக.

18. ஒரு நேரான கடற்கரையிலிருந்து 2 மைல் தொலைவில் A என்பதொரு கலங்கரை விளக்கம் நிற்கிறது. இவ் விளக்கிடத்திற்கு வெகு அணித்தாகிய N என்னும் இடத்திலிருந்து கடற்கரையின் வழியே 5 மைல் தொலைவில் B என்னும் ஓரிடம் உள்ளது. A-லிருந்து B-க்கு ஒரு தொலைபேசி அமைக்க வேண்டும். நிலவழிக் கம்பித் தொடர்பு ஒரு மைலுக்கு ரூபா 225 வீதமும், நீர்க்கீழ் தொடர்பு ஒரு மைலுக்கு ரூபா 900 வீதம் செலவு கட்டுகிறது என்ருல், சாத்தியமான வரையில் வெகு சிக்கனமான செலவில் இத்தொடர்பு எங்ஙனம் அமைக்கப்படல் கூடும்?

19. $9y^2 + 6xy + 4x^2 - 24y - 8x + 4 = 0$ ஆனுல் y-ன் திருப்ப மதிப்புகளைக் கண்டறிக.

20. AB என்பது 8″ நீளமுள்ளது. AB-ல் $3AC^2 + BC^2$ ஆனது மீச்சிறு மதிப்புடையதாகுமாறு C என்னும் புள்ளியிடத்தைக் குறிப்பிடுக.

21. ABC என்னும் முக்கோணத்தில் BC-ன்மேல் ஒரு பக்கங் கிடக்குமாறு ஒரு செவ்வகம் உட்புறத்தில் வரையப்படுகின்றது. இப்பக்கம் x நீளமும், அயல் பக்கம் y நீளமும் உண்டாகப் பெற்ருல் $a = BC$-ம், குத்துயரம் h-ம் ஆகுமிடத்து, $\frac{x}{a} + \frac{y}{h} = 1$ என

நிரூபிக்க. இத்தொடர்பைக் கொண்டு மேற் கூறியபடி மீப்பெரு பரப்புள்ள செவ்வகம் அமைக்கும் மாற்றினை அறிக.

22. ஒரு விகிதமும் அதன் வர்க்கமும் மீப்பேரளவு வித்தியாசப்பட்டிருக்குமாறு கண்டறிக.

23. ஒரு செவ்வகத்தின் சுற்றளவு $100''$. பரப்பளவு மீப்பெரியதாகுமிடத்து அதன் பக்கங்களைக் கண்டறிக.

24. (a) வரைபட நாட்டங்கொண்டு $f'(x) = 0$-ம், $f''(x_0) < 0$ ஆகுமிடத்து $f(x_0)$ மீச்சிறு மதிப்பினதாகுமெனக் காட்டுக.

(b) $x^3 - 3x + 11$-ன் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளைக் கண்டறிக.

25. $3 \cos x + 4 \sin x$-ன் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளைக் காண்க.

26. $ABCD$ என்னும் செவ்வகத்தில் $AB = 9''$; $BC = 6''$ ஆகும். CD-ல், $PC = x''$ ஆகுமாறு P என்னும் புள்ளி குறிக்கப்படுகின்றது. xஐச் சுட்டி $PA^2 + PB^2$ குறிப்பிட்டு அதன் மீச்சிறு மதிப்பையும் காண்க.

27. $2x^3 + 5x^2 - 4x + 7$ என்னுஞ் சார்பினது மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளைக் காண்க.

28. $30'' \times 14''$ அளவுள்ள செவ்வகத்தின் நாற்புற மூலைகளிலிருந்தும் சமபரப்புள்ள சதுரங்கள் வெட்டியெடுத்தபின், எஞ்சிய பாகத்தின் விளிம்புகள் மடிக்கப்பட்டு ஒரு மூடியில்லாத செவ்வகமாக அமைக்கப்படுகின்றது. இச்செவ்வகத்தின் கொள்ளளவு மீப்பேரளவினதாக அமையவேண்டுமானால், வெட்டியெடுக்கப்படும் சதுரத்தின் பக்கத்தைக் கண்டறிக.

29. ஒரு ஒழுங்கான வட்டமுக உருளையின் வளைதளப்பரப்பும், முகங்களின் பரப்பும் கூடிய பரப்புத் தொகை கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் உயரமானது அடிப்பாக ஆரத்திற்கு இருமடங்காகுமிடத்து, அதன் கொள்ளளவு மீப்பேரளவினதாகுமெனக்காட்டுக.

30. ஒரு துடுப்புப் பந்தாட்டத் தரையானது ஒவ்வொரு முனையிலும் அரை வட்டமொன்று அமையப்பெறும் செவ்வக வடிவாக

உள்ளது. அதன் சுற்றளவானது கால்மைல் ஓட்டப்பாதையாக உபயோகிக்கப்படல் வேண்டும். செவ்வகப் பாகம் மீப்பெரு பரப்பினதாகவேண்டுமானால், அத்தரையினது வகையளவுகளைக் கண்டறிக.

31. $x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ என்னுஞ் சார்பினது மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளைக் காண்க.

32. $(x + 3)(6 - x)$ என்னுஞ் சார்பினது மீப்பெரு மதிப்போடு அதற்கு ஏற்புடைய x-ன் மதிப்பையும் கண்டறிக.

33. இருபுற வாய்களும் மூடப்பட்டதோர் ஒழுங்கான வட்ட முகச் செவ்வகமொன்று 12 சதுர அங்குல உலோகத் தகட்டால் அமைக்கப்படவேண்டியதாகின்றது. அதன் கொள்ளளவு மீப்பேரளவினதாதற்கு அதன் அடித்தளத்தின் பரப்பைக் காண்க.

34. $2x^3 - 3x^2 - 36x + 10$ என்னுஞ் சார்பினது மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளைக் கண்டறிக.

35. ஒரு வளைவரையானது $y = 2x/(1 + x^2)$ என்னும் தொடர்பால் குறிக்கப்படுகின்றது. அது $(1, 1)$ என்னுமிடத்தில் மீப்பெரு நிலைத் தூரத்தையும், $(-, -1)$ என்னுமிடத்தில் மீச்சிறு நிலைத் தூரத்தையும் கொண்டுள்ளதென நிருபிக்க.

36. ஒரு மூடியற்ற வட்டத்தளங்கொண்ட உருளை வடிவாகிய நீர்த்தொட்டியானது πa^3 கனபரிமாண நீர் கொள்ளுமாறு ஓர் உலோகத் தகட்டால் செய்யப்படுகின்றது. அவ்வுலோகத் தகடு மீச்சிறு பரப்பளவினதாக வேண்டுமானால், அந்நீர்த்தொட்டியின் உயரத்தையும், அடித்தள ஆரத்தையும் கண்டறிக.

37. $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$ என்னுஞ் சார்பினது மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளைக் காண்க.

38. ஒரு நீராவிக் கப்பலுக்கு நிலக்கரிக்காகவும் கூலிக்காகவும் ஆகும் தினச் செலவு முறையே $4K^3v^2$, C^3/v என்னும் கோவைகளால் குறித்தறியப்படுகின்றது. இங்கு K, C என்பன மாறிலிகளும், v என்பது வேகமும் ஆகும். கப்பல் பயணம் மிகச் சிக்கனமாகச் செலவு கட்டி வரவேண்டுமானால், நிலக்கரிக்காகுஞ் செலவு கூலிக்காகுஞ் செலவில் பாதியாதல் வேண்டுமெனக் கண்டறிக.

39. ஒரு சுவரிலிருந்து a தூரத்தில் மீப்பேரளவு வெளிச்சம் கிடைக்கப்பெறுதற்கு அதன்கண் எவ்வளவு உயரத்தில் சாளர மொன்று அமைக்கப்படவேண்டுமெனக் கண்டறிக. வெளிச்சத்தின் விளக்கமானது சாளரத்தின் தூரத்தின் இரு படிக்கு நேர் மாறுற்றும், வெளிச்சம் புகுந்தளத்தில் அமையும் செங்கோட்டோடு கொள்ளும் cosine-க்கு நேரடியாகவும் இருக்குமெனக் கருதிக் கொண்டு இதனைச் செய்க.

40. u-ம் v-ம் மிகை இராசிகளாகவும், uv மாறிலியாகவும் இருக்குமானால், $u = v$ ஆகுமிடத்து $u + v$ ஆனது மீச்சிறு மதிப்பினதாகுமென நிரூபிக்க.

41. 6′ நீளமுள்ளதொரு மெல்லிய இரும்புக் கம்பியானது, ஒரு செவ்வக வடிவமாக வளைக்கப்படுகின்றது. அங்ஙனமாகுங்கால் AB வழியே ஒரு மடிப்பாகவும், BC, CD, DA என்னும் பக்கங்களில் இரு மடிப்பாகவும் அமைந்துள்ளது. எனின், $ABCD$-ன் மீப்பெரு பரப்பைக் கண்டறிக.

42. ஒரு ஒழுங்கான வடிவுடைய கூம்பினது வட்ட அடித்தளத்தின் ஆரமும், உயரமும் சேர்ந்து 12″ நீளமுண்டாகுமானால், அதன் மீப்பெரு கொள்ளளவினைக் கண்டறிக.

3·5. இயற்பியல் துறையில் வகை கெழுவின் பயன்பாடு (Physical application of the Derivative)

இயந்திரவியலில் வகை கெழுவின் பயன்பாடு (Application to mechanics) :

(1) ஒவ்வொரு புள்ளியிடத்தும் ஒரு சார்பற்ற மாறியானது பெறும் ஏற்றத்திற்குத் தக்கபடி $f(x)$ ஆனது பெறும் ஏற்றத்தின் மாறு வீதத்திற்கு ஓர் அளவையை அறிவதற்கு வழி செய்வதனால், $f'(x)$ என்னும் வகையீட்டுக் குணகம் பல வகையாகப் பயன்பட்டுச் சிறப்புறுவதாகின்றது.

(2) u, v என்னும் இரு இயற்பியற் பரிமாணங்கள் $u = f(v)$ என்னும் சார்பு வடிவத்தில் தொடர்புற்றுள்ளனவாகக் கருதுவோம். அப்பொழுது $\frac{du}{dv}$ என்பது v ஐப் பொறுத்துச் சார்பு u-ன் சரியான மாறுவீதமாகும். இது v-ல் நேரும் ஒவ்வோர் அலகு ஏற்றத்திற்கும் u-ன் அலகுகளால் குறிக்கப்படும். உதாரணமாகக் குறிப்பிட்ட நிறையுடையதொரு வாயுவின் அழுத்தம் P-ம்,

கனபரிமாணம் v-ம் குறிப்பிட்ட வெப்ப நிலையில் ஒரு சார்புத் தொடர்பால் இணைக்கப்படுகின்றன. ஓரலகு பரப்பில் அழுத்தம் பவுண்டுகளாலும், கனபரிமாணம் கன அங்குலங்களாலும் அளவு கொள்ளப்படும்பொழுது, v எய்தும் யாதேனும் ஒரு மதிப்புக்கு $\frac{dp}{dv}$ ஆனது v ஐப் பொறுத்து ஓரலகு பரப்பில் இத்தனை பவுண்டுகளாகுமென P-ன் மாறுவீதத்தைக் குறிப்பிடுவதாகும். வகையளவைகளை நோக்க δu ஆனது uஐ ஒத்தும், δv ஆனது ıஐ ஒத்தும் இருக்கும்.

மேலும், நீரானது கொதியெய்தும் நிலைமையென்பது வெப்பமாகிய t ஐயும் உயரமாகிய h ஐயுங் கொண்ட சார்பலனைத் தொடர்புறும். t ஆனது சென்டிகிரேட் டிகிரிகளாலும், h ஆனது மீட்டர்களாலும் அளவை பெறுமிடத்து $\frac{dt}{dh}$ ஆனது t-ன் மாறுவீதத்தை ஒரு மீட்டருக்கு இத்தனை டிகிரிகளெனக் குறிக்கும்.

(3) குறிப்பிட்டதொரு கணத்தில் வேகத்தையறிவதற்கொரு கோவை (Expression for velocity at an instant) :

இப்பொழுது ஒரு நேர்க் கோட்டில் இயங்குவதொரு துகளின் இயக்க நிலையைக் கருதுவோம். துகளானது X அச்சின் வழியே இயங்குகின்றதெனக் கொள்ளுவோம். ஒரு குறிப்பிட்ட கண நேரத்திலிருந்து t நேரம் கழிந்த பின் அத்துகளானது ஆதியிலிருந்து s தொலைவில் உள்ளதாகட்டும். s ஆனது t ஐப் பொறுத்துள்ளதால், அது t-ன் சார்பலனாகும். $(t+\delta t)$ நேரத்தில் இயங்கு துகளானது ஆதி (0)-லிருந்து $(s+\delta s)$ தூரத்தில் இருப்பதாகட்டும். அப்படியானல் அது δt இடைவெளியில் δs தூரம் சென்றதாகும். அப்பொழுது $\frac{\delta s}{\delta t}$ ஆனது δt இடைவெளியில் துகள் சென்ற சராசரி வேகத்தை உணர்த்தும். $\delta s \to 0$, $\delta t \to 0$ ஆகுங்கால், $\frac{\delta s}{\delta t}$ -ம் வழக்கமாக ஒரு வரம்பினையடைந்து t நேரத்தில் நிகழும் வேக v ஐ அறிவிக்கும்.

ஆகவே, t நேரத்தில் வேகம் $\displaystyle lt_{\delta t \to 0} \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{ds}{dt}$

$$\therefore \quad v = \frac{ds}{dt}.$$

இனி, $\frac{ds}{dt}$ ஆனது மிகை இராசியானல் t-யுடன் s-ம் பெருகும். துகளும் அச்சின் வழியாக மிகை இராசித்திசையில் இயங்குவதாகும்.

$\frac{ds}{dt}$ குறை இராசியானல், t பெருகுங்கால், s குறைவுறுவதாகும். இதனல் துகளானது ஆதிக்கு இடது பக்கமாக இயங்கும் நிலைமையைப் பெறும்.

குறிப்பு : வரைபட விளக்கக் குறிப்பில் கால-நேர வரையில் v ஆனது சரிவைக் குறிக்கும்.

(4) வேக முடுக்கத்தை அறிதற்கொரு கோவை (Expression for acceleration) :

ஒரு துகள் இயங்குங் காலத்தில் அதன் வேக அதிகரிப்பு வீதமே முடுக்கமென அறியப்படும். வேகம் v ஆனது ஒரு சீராக நிகழுவதன்றுயின், அது t-ன் சார்பலனுய் அமையும். யாதேனுமொரு t நேரத்தில் இயங்குந் துகளின் வேகம் v ஆகவும், $t + \delta t$ நேரத்தில் $v + \delta v$ ஆகவும் இருக்குமானல், அப்பொழுது δt இடைவெளியில் வேகமாற்றம் δv ஆகும்.

அப்பொழுது $\frac{\delta v}{\delta t}$ ஆனது இவ் விடைவெளியில் சராசரி வேக மாறுவீதம் அல்லது சராசரி முடுக்கம் எனப்படும். δt ஆனது அளவின்றிச் சிறியதாகுங் காலத்தில், சராசரி வேகம் அடையும் வரம்பு மதிப்பே t கணத்தில் நிகழும் முடுக்கமாகும். இம் முடுக்கத்தை α எனக் குறிப்பிட்டால்,

$$\alpha = \frac{dv}{dt} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

மேலும், $$\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}\cdot v = v\frac{dv}{ds} \quad \ldots \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{d}{ds}(v^2) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

இங்கு, 4ஆல், வேகமானது தூரத்தைச் சார்த்திக் கொடுக்கப் படுமிடத்து முடுக்கத்தைக் கண்டறிய உதவி கிடைக்கிறது (அனுகூலப்படுகிறது).

மேலும், $F = m\,\alpha$ ஆதலின், $F = \dfrac{d\,(mv)}{dt}$ ... (5)

அல்லது $\dfrac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}\,mv^2\right)$ ஆகும். ... ... (6)

(5)-ல் துகளின்மேல் செயல்படும் விசையானது உந்தத்தின் காலத்தைப் பொறுத்த மாறுவீதமாகக் கூறப்படுகிறது.

(6)-ல் அது இயக்க ஆற்றலின் (kinetic energy) தூரத்தைப் பொறுத்த மாறுவீதமாகக் கூறப்படுகிறது.

வரைபட விளக்கத்தில் α ஆனது வேக வளைவரைகளின் சரிவாகும்.

5. கோணவேகமும், கோணமுடுக்கமும் (Angular velocity and acceleration):

ஒரு தளத்தில் ஒரு நிலையான OX என்னும் நேர்க்கோட்டின் மேலுள்ள O என்பதொரு நிலையான புள்ளியைச் சுற்றி P என்னுந் துகளானது சுழலுவதானால், யாதேனுமொரு நேரம் t-ல், கோணம் XOP ஆவது θ ஆகக் கொள்ளப்பட்டால் நேரத்தைப் பொறுத்து θ-ல் நிகழும் மாறுவீதமே, O என்னும் புள்ளியைச் சுற்றி P-யினது கோணவேகம் அல்லது OP என்னும் நேர்க் கோட்டின் கோணவேகம் எனப்படும்.

ஒரு சக்கரமானது ஒரு நிலையான அச்சைச் சுற்றிச் சுழலுவதாகக் கருதுவோம். ஒரு நியமித்த இடம்பற்றிய நிலைமையிலிருந்து t நேரத்தில் θ கோணம் சுழன்றுள்ளதாயின், θ ஆனது பெருகும் வீதத்திலிருந்து சக்கரம் சுற்றுகின்ற வேக வீதத்தைக் கணக்கிடலாகும். ஒரு நிலையான அச்சினைச் சுற்றிச் சுழலுமொரு கட்டிறுக்கப்பொருளைப் (rigid body) பொறுத்த வரையில் ஒரு நியம நிலையிலிருந்து t நேரத்தில் அது சுழன்று சென்ற கோணம் θ எனக் கொள்ளப்படும். ஒவ்வொரு வகையிலும் காலமானது $t + \delta t$-க்கு மிகுந்தபொழுது அது சுழன்று சென்ற கோணம் $\theta + \delta\theta$ ஆகுமானால், அப்பொழுது $\dfrac{\delta\theta}{\delta t}$ ஆனது δt நேர இடை

வெளியில் சராசரி கோண வேகத்தை அளப்பதாகும். $\frac{d\theta}{dt}$ என்னும் எல்லை மதிப்பில் t நேரத்தில் சக்கரமானது சுழலும் வீதத்தை அளப்பதாகும். இது t என்னுங் கணத்தில் காணப்படும் கோணவேகம் எனப்படும். இது வழக்கமாக ω என்னும் எழுத்தால் குறிக்கப்படும். ஆகவே, $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ ஆகும்.

கோணவேகமானது ஒரு சீராக நிகழாவிட்டால், கோண வேகத்தின் மாறுவீதம் கோணமுடுக்கம் எனப்படும். t என்னும் எக் கணத்திலேனும் காணப்படும் கோண முடுக்கமானது

$$\frac{d\omega}{dt} \text{ அல்லது } \frac{d^2\theta}{dt^2} \text{ அல்லது } \omega\frac{d\omega}{d\theta} \text{ ஆகும்.}$$

விளக்க உதாரணங்கள்

(1) வகையீட்டுக் குணகத்தின் குறிமுறைகளைப் பயன்படுத்திப் பின்வருவனவற்றைக் குறிக்க :

(i) ஒரு வளைவரையின் கீழுள்ள பரப்பு A-ன் அச்சுத் தூரங்களைப் பொறுத்து மிகுதிபடு வீதமானது நிலைத்தூரங்களுக்கு விகிதமுற்றிருக்கும்.

(ii) ஒரு காய்ச்சப்பட்ட பொருளின் வெப்பநிலை குறையுறுதற்கண் மாறும் வீதமானது அதன் வெப்பம் சுற்றுப்புறத்து வெப்ப நிலைக்கு எவ்வளவு மிகுதியுற்றிருப்பதாகுமோ அதற்கு ஏற்ப விகிதமுறும்.

செய்முறை : அச்சுத் தொலைவுகளைப் பொறுத்து ஒரு வளை வரையின் கீழடங்கும் பரப்பு A-ன் பெருகும் வீதமானது $\frac{dA}{dx}$ குறிக்கப்படும்.

K என்பதொரு மாறிலியாகிய வழி $\frac{dA}{dx} = Ky$ என விதி கூறுகின்றது.

(iii) காய்ச்சப்பட்ட பொருளானது t நேரத்தில் T° வெப்ப நிலையிலிருப்பதாகக் கருதுவோம். அஃதுள்ள அறையின் நிலையான சுற்றுப்புற வெப்பம் $T_0{}^{\circ}$ ஆகட்டும்.

ஆகவே, t நேரத்தில் காய்ச்சப்பட்ட பொருளின் வெப்பநிலை யானது சுற்றுப்புற வெப்பநிலைக்கு $(T^\circ - T^\circ_0)$ மிக்கிருக்கும். T ஆனது t-யோடு மாறுபடுவீதம் $\frac{dT}{dT}$ என்றதனுல் தரப்படும். விதிப்படி $\frac{dT}{dt}$ குறை இராசியாகி (t மிகும்பொழுது T குறைவுறுத லின்), $(T - T_0)$-க்குத்தக வேறுபடும்.

$\therefore \quad \frac{dT}{dt} = -K(T^\circ - T_0^\circ)$ ஆகும். இங்கு K ஒரு மாறிலி யாகும்.

(2) ஒரு நிலையான வெப்பநிலையில், ஒரு வாயுவினது கன பரிமாணம் v, அதன் அழுத்தம் P-க்கு மாறு விகிதத்திலுள்ளது. $v = 5$ ஆகும்பொழுது $P = 5$ எனின், $P = 4$ ஆகும்பொழுது P ஐப் பொறுத்து v அடையும் பெருகு வீதத்தைக் காண்க.

விஞவின்படி $v \propto \frac{1}{P}$ அதாவது, $v = \frac{K}{P}$ (K ஒரு மாறிலி யாகும்.) $P = 5$, $v = 5$. ஆகும்பொழுது $K = 25$ ஆகும்; $v = \frac{25}{P}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{dv}{dP} = \frac{25}{P^2} = -\frac{25}{16} \text{ (}P = 4\text{ ஆகுமிடத்து)}$$

$\therefore$ P ஐப்பொறுத்து கனபரிமாணத்தின் மாறுவீதம் $\frac{-25}{16}$ ஆகும். இங்குக் குறை இராசியின் பொருண்மையாவது P பெருகு மிடத்துக் குறைவுறும் என்பதாம்.

(3) $s + 50t - 16t^2$ என்னும் நியமத்தையொட்டிய தாகும்படி மேலெறியப்பட்டதொரு கல்லானது t செகண்டில் s அடி தூரம் காற்றிடையே விரைந்தேகுகின்றது. எனின், $\frac{ds}{dt}$ யாதனைக் குறிப்பிடுகின்றது? $t = 1$ ஆகுமிடத்து அதன் மதிப்பென்ன? $\frac{ds}{dt}$ -ன் குறை இராசி மதிப்பின் பொருண்மை யாது? அக் கல்லால் அடையப்பட்ட மீப்பெரு உயரம் யாது? மேலெறியப்பட்ட துவக்க வேகத்தையும், அது தரையை வந்து தாக்குங் காலத்து உள தாகும் வேகத்தையுங் காண்க.

$\frac{ds}{dt}$ என்பது யாதேனும் ஒரு t நேரத்தில் துகளுக்கு உண்டாகிய வேகத்தைக் குறிப்பிடுகின்றது.

இப்பொழுது $\frac{ds}{dt} = 50 - 32t$ ஆகும்.

$t = 1$ ஆகுமிடத்து $\frac{ds}{dt} = 50 - 32 = 18$ (1)

$\therefore$ 1 செகண்டு கழித்து வேகம் 18 அடி/செ. வீதம் நேர் மேல் நோக்கியதாக நிகழும் கல்லானது மேனோக்கி எறியப்பட்டது. அதுபற்றி மிகை இராசித்திசையில் அது சென்ற தூரத்தை யளப்பதற்குத் தலைக்கு மேனோக்கிய திசையே ஏற்புடையதாகும். $\frac{ds}{dt}$-ன் குறை இராசி மதிப்பானது t, பெருகும் s குறைவுறுவதனைக் குறிக்கும். மேலெறிதல் தொடங்கிய தொடக்கப் புள்ளியிலிருந்து கல்லானது சென்ற தூரத்தை s குறிப்பிடும். ஆகவே, t பெருகுங் காலத்தில் s குறைவுறும் நிலைமையுண்டானால், கல்லானது தொடக்கப் புள்ளியை நாடி வருவதாகப் பொருள்படும். அதாவது குறிப்பிட்ட கணத்தில் கல்லானது கீழ்நோக்கி விழுகின்றதாகும். $\left(\frac{ds}{dt}\right.$ மிகை இராசியானால், கல் மேனோக்கிச் செல்லுகின்றதாகும்.$\left.\right)$

மீப்பெரு உயரத்தை அடைந்தபொழுது, வேகம் பூச்சியமாகும். அதாவது $\frac{ds}{dt} = 50 - 32t = 0$ ஆகும். $\therefore t = \frac{25}{26}$. அதுபற்றி $s = 50\left(\frac{25}{16}\right)^2 = 39\frac{1}{16}$ ஆகும். இதுவே எய்தக்கூடிய மீப்பேருயரமாகும்.

அல்லது கீழ்க்காட்டிய முறையாலும் அறியலாம் :

$$t = \frac{25}{16} \text{ ஆகுமிடத்து } \frac{ds}{dt} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

அதனோடு $\frac{d^2s}{dt^2} = -32$ (இது குறை இராசியாகும்.)

$\therefore t = \frac{25}{16}$ எனின், s மீப்பேருயரமாகும். இஃதொன்றே மீப்பெரு மதிப்பாதலின், அடையக்கூடிய மீப்பேருயரமும் இதுவேயாகும்.

$t = 0$ ஆகும்பொழுது, $\frac{ds}{dt}$-ன் மதிப்பே மேலெறி துவக்க வேகமாகும். இது 50 அடி/ செ. ஆகும்.

கல்லானது தரையைத் தாக்கும்பொழுது அது சென்ற மொத்த தூரம் $= s + (-s) = 0$ ஆகும்.

$\therefore$ தரையைத் தாக்க வருமளவும் பிடித்த நேரமானது $50t - 16t^2 = 0$-ஆல் t-க்குக் கிடைக்கும் மதிப்பேயாகும்.

அதாவது, $t(50 - 16t) = 0$

$\therefore \quad t = 0$ அல்லது $t = 3\frac{1}{8}$ ஆகும்.

இப்பொழுது $t = 0$ என்பது தரையை விட்டுக் கிளம்புங் காலத்தில் ஆரம்ப நிலைமைக்கு ஏற்ற மதிப்பாகும். ஆகவே, $s = 0$ ஆகும். ஆகவே, $t = 3\frac{1}{8}$ என்பது இறுதி நிலையில் $s = 0$ ஆகும் பொழுது ஏற்புடைத்தாகிய மதிப்பாகும். (தற்செயலாக எழுந்து போய் மீண்டும் வந்து சேருமளவும் சென்ற தூரமானது மேனோக்கிச் சென்ற தூரத்திற்கோ, கீழ்நோக்கி வந்தடைந்த தூரத்திற்கோ இருமடங்காதலைக் காண்கின்றோம்.)

$\therefore$ இழிந்து வந்து தரையைத் தாக்குங் காலத்தில் ஏற்படும் வேகமானது $t = 3\frac{1}{8}$ ஆகும்பொழுது $\frac{ds}{dt}$ பெறும் மதிப்பாகும். அது -50 அடி/செ. ஆகும். (தற்செயலாக நாம் இங்கு அறிவதாவது : மேற்கிளம்பிய தொடக்க வேகமும் இறுதியாக வந்து தரையைத் தாக்கிய காலத்தில் உண்டாகிய வேகமும் எண் மதிப்பில் ஒத்தனவாகும்.)

(4) ஒரு நிலையான அச்சைச் சுற்றிச் சுழலும் உருளையொன்று t நேரத்தில் சுற்றிய கோணம் θ ஆனது $\theta = 5\pi t(4 - 3t + t^2)$ என்னுஞ் சூத்திரத்தால் கொடுக்கப்படுகின்றது. t செகண்டுகளாலும், θ ஆரையன்களாலும் அளவு குறிக்கப்படுகின்றன. கோண வேகம் எப்பொழுது மீச்சிறு மதிப்பினதாகுமெனக் கண்டறிக. இரண்டு செகண்டுகள் கழித்து உண்டாகிய கோண வேகத்தையும், முடுக்கத்தையுங் கண்டறிக.

இங்கு $\theta = 5\pi(4t - 3t^2 + t^3)$ ஆகும்.

யாதொரு நேரம் t-ல் கோண வேகம் $\frac{d\theta}{dt} = 5\pi(4 - 6t + 3t^2)$

கோணமுடுக்கம் $= \frac{d^2\theta}{dt^2} = 5\pi(-6 + 6t)$.

கோணவேகம் மிகப்பேரளவினதாக வேண்டுமானுல்,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) \quad \text{அதாவது} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0.$$

அதாவது $5\pi(-6 + 6t) = 0$.

$\therefore \quad t = 1$

இப்பொழுது $\frac{d^3\theta}{dt^3} = 30\pi$. இது மிகை இராசியாகும்.

$\therefore \quad t = 1$ ஆனது மீச்சிறு மதிப்பை உண்டாக்கும்.

ஆகவே, கோணவேகமானது 1 செகண்டு கழிந்தபின் மீச்சிறு மதிப்புடையதாகும்.

$\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ -களுக்குரிய கோவைகளில் $t = 2$ என்று பிரதியிட்டால் கோணவேகமும், கோணமுடுக்கமும் 2 செகண்டுகள் கழிந்தபின் முறையே 20π ஆரையன்/செ.-ம், 30π ஆரையன்/செ^{2}-ம் ஆகும்.

பயிற்சி 3.5

1. வகையீட்டுக் குணகக் குறியீடுகளால் அமைக்க :

(i) ஒரு வட்டத்தின் A சதுர அங்குலமுள்ள பரப்பு ஆனது r அங்குலமுள்ள ஆரத்தைப் பொறுத்துப் பெறும் பரப்பு மாறுபாடு வீதமானது r-க்கு விகிதசமமுறும்.

(ii) ஒரு சுழலும் பொருளினது கோண வேகமானது அது சுற்றத் தொடங்கியதிலிருந்து t செகண்டு கழிந்தபின் சுழன்று சென்ற θ கோணத்திற்கு விகித சமமுறுவதாகும்.

2. நிலையான வெப்பநிலையில் கொடுத்த நிறையை உடைய ஒரு வாயுவினது அழுத்தம் P-ம், கனபரிமாணம் v-ம், $Pv = K$ (ஒரு மாறிலி) என்னும் சமன்பாட்டால் தொடர்புறுத்தப்படு

கின்றது. 12 கன அடிவாயுவின் அழுத்தம் ஒரு சதுர அங்குலத்திற்கு 14 பவுண்டு எடையாகும் எனின், (i) $v = 10$ கன அடியாகுமிடத்து v ஐப் பொறுத்து P-ன் பெருக்க வீதத்தையும், (ii) கன பரிமாணம் 11.9 கன அடியாகக் குறைக்கப்பட்டவிடத்து நிகழும் அழுத்தத்தையும், (iii) கன பரிமாணத்தில் நேரும் என்ன வேறுபாடானது அழுத்தத்தைச் சதுர அங்குலத்திற்கு 14.2 பவுண்டு எடையாக மிகுவிப்பதாகு மென்பதையும் கண்டறிக.

3. ஒரு மின்வைப்புப் பெட்டகத்தின் (Battery) மின்னியக்க ஆற்றல் E-க்கும் அதன் வெப்பநிலை θ-க்கும் உள்ள தொடர்பு தோராயமாக $E = 1.4\ [1 - .0008\,(\theta - 15)]$ வோல்ட் என்னுஞ் சூத்திர வடிவில் கொடுக்கப்படுகிறது. θ என்பது சென்டிகிரேட் டிகிரிகளால் கூறப்படும். இதைப் பலன் கொண்டு ஒரு டிகிரிக்கு மின்னியக்கச் சக்தியின் மிகுபடு வீதத்தைக் காண்க.

4. ஒரு டாஞ்செண்ட் மின்னோட்டமானியில் (galvanometer) முள்ளானது காந்த துருவ ரேகையிலிருந்து $\theta°$ விலக்கமுறுவதானல், மின்னோட்டம் C ஆம்பியரில் $C = K \tan \theta$ என்னும் சூத்திரத்தால் அறியப்படும். அம்முள்ளின் விலக்கம் எவ்வளவு என்பதுபற்றி மின்னோட்டத்தை அளவிடுங்கால் நேரும் விகிதசமப் பிழையானது மீச்சிறு அளவினதாகும்.

5. u, v என்பன மாறிலிகளாகுமிடத்து $S = ut + \frac{1}{2}\,at^2$ எனின், ஒரு துகளானது நிலையான முடுக்கத்துடன் இயங்குகின்றதாமெனக் காட்டுக.

6. (i) v^2-ஆனது S-ன் இருபடிக் கோவையானுல், இயக்கம், நிகழும் திசைக்கோட்டில் ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து முடுக்கமானது தூரத்திற்குத்தக மாறுபடுவதாமென நிரூபிக்க.

(ii) v-ஆனது தூரத்தின் இருபடிக்கு மாறுபடுவதனுல், முடுக்கமானது தூரத்திற்கு முப்படியாக மாறுமென நிரூபிக்க.

(iii) v^2-ஆனது S-ன் நேர்க்கோட்டுச் சார்பலனுனல், முடுக்கம் நிலையானதாகுமெனக் காண்க.

7. ஓரலகு நிறையுள்ளதொரு துகளினது இடப்பெயர்ச்சியானது t செகண்டுகள் கழித்து $x = 3 \cos (2t - 4)$ என்னும்

நியமத்தால் கொடுக்கப்படுகிறது. இரண்டு செகண்டுகள் கழிந்த பின் முடுக்கத்தையும், வேக ஆற்றலையும் (Kinetic energy) கண்டறிக.

8. ஒரு நேர்க்கோட்டு வழியே இயங்குவதொரு துகளானது t நேரத்தில் ஒரு நிலையான புள்ளி 0-லிருந்து விலகியிருக்கும் x தூரம் $x = a\cos(nt + \epsilon)$ என்பதால் கொடுக்கப்படுகின்றது. யாதொரு கணத்திலேனும் வேகம் v ஐயும், முடுக்கம் α ஐ கண்டறிக. முடுக்கமானது இடப் பெயர்ச்சிக்குத் தக்கபடியாகவும், 0 என்னும் புள்ளியை நோக்கியதாகவும் நிகழுவதாகு மென நிரூபிக்க.

மேலும் (i) $x = A\cos(nt + B)$; (ii) $x = C\sin(nt + D)$; (iii) $x = E\cos nt + F\sin nt$ என்பனவற்றுள் ஒவ்வொரு சமன்பாடும் $\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = 0$ என்னும் ஒரே சமன்பாட்டை உண்டாக்குவதாகு மெனக் காட்டுக (இங்கு A, B, C, D, E, F என்பன மாறிலிகளாகும்). இஃது சாதாரண சீரிசை இயக்கத்தின் வகையீட்டுச் சமன்பாடெனக் கூறப்படும்.

9. ஒரு சக்கரம் சுழன்ற θ கோணமானது நேரம் t ஐச் சார்த்தி $\theta = 6t + \frac{3t^2}{2} - \frac{t^3}{3}$ என்னுஞ் சூத்திரத்தால் கொடுக்கப்படுகின்றது (இங்கு θ ஆரையன்களாலும், t செகண்டுகளாலும் அளவு எய்தும்). கோண வேகம் எவ்வளவு நேரம் பெருகுவதாகும் என்பதையும், சக்கரம் நிற்பதற்கு முன் எவ்வளவு நேரம் கழியுமென்பதையும் கண்டறிக. அது சுழன்ற மீபபெரு கோணத்தையும் குறிப்பிடுக.

10. P என்பதொரு துகளானது ஒரு நேர்க்கோட்டின் வழியே ஒரு சீரான v வேகத்துடன் செல்லுகின்றது. கொடுத்த கோட்டிலிருந்து d தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியைச் சுற்றி அதன் கோண வேகத்தைக் கணக்கிடுக.

11. ஒரு துகளானது ஒரு நேர்க்கோட்டில் இயங்குங் காலத்தில் 0 என்னும் நிலையான புள்ளியிலிருந்து t நேரத்தில் அது சென்றிருந்த தூரம் $x = 2\sin t + 3\cos t$ என்பதனுல் பெறப்படும். எனின், அதன் முடுக்கம் எப்பொழுதும் புள்ளி 0 லிருந்து விலகி உள்ள தூரத்திற்கு எண்ணளவில் சமமாகுமெனக் காட்டுக.

12. மேனோக்கி எறியப்பட்ட ஒரு பொருள் t நேரத்தில் சென்ற S தூரம் $S = 160t - 16t^2$ என்றதனுல் பெறப்படும். அதன் வேகம் எப்பொழுது முற்றும் இழக்கப்படும்? அது அடைந்த மீப்பெரு உயரம் யாது?

தொடக்க வேகத்தையும், புறப்பட்ட புள்ளியிடத்தை மீண்டும் வந்தடையும் காலத்தில் அதற்குண்டாகிய வேகத்தையும் கண்டறிக. அதன் முடுக்கம் யாது? $t = 7$ செகண்டுகள் ஆகும் பொழுது வேகத்தையறிக. குறை இராசிக்குறியின் பொருண்மையை விளக்குக.

13. ஒரு துகள் ஒரு நேர்க்கோட்டின் வழியே t செகண்டுகளில் சென்ற S தூரம் $S = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 6$ என்றதனுல் பெறப்படும். அதன் முடுக்கம் எப்பொழுது பூச்சியமாகும்? அச்சமயத்தில் அதன் வேகத்தையறிக. அத்துகள் 10 அடி தூரம் சென்ற பின் அடைந்த வேகத்தையும் கண்டறிக.

14. ஒரு நேர்க்கோட்டின் வழியே ஒரு துகளானது t செகண்டுகளில் ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து கடந்து சென்ற தூரம் $S = 20 - 5t + t^2$ என்னும் நியமத்தால் பெறப்படும். 10 செகண்டுகள் கழிந்தபின் அதன் வேகத்தையும், முடுக்கத்தையும் காண்க.

15. ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து கீழ் நோக்கி நழுவ விடப்பட்டதொரு கல்லானது t செகண்டுகளில் சென்ற S தூரமானது $S = 16t^2$ என்றதனுல் கிடைக்கப்பெறும். 1 செகண்டு கழிந்த பின் அதன் வேகத்தையும், முடுக்கத்தையும் அறிக.

16. ஒரு பொருளானது t செகண்டில் செல்லும் S அடி தூரமானது $S = 12t - t^2$ என்றதனுல் பெறலாகும். மூன்று செகண்டுகள் கழிந்த பின் அதன் வேகத்தையும், முடுக்கத்தையும் கண்டறிக. மேலும், அதன் வேகம் எப்பொழுது எவ்விடத்து மீச்சிறு மதிப்பினதாகும்?

17. $v = \frac{ds}{dt}$-ம்; $g = \frac{d^2s}{dt^2}$-ம் ஆனுல், $g = v\frac{dv}{ds}$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

18. ஒரு நேர்க்கோட்டின் வழியே இயங்குவதொரு துகளின் தூர-நேர நியமம் $S = at + bt^2$ ஆகும். இங்கு a, b-க்கள் மாறிலிகளாகும். $t = 4$ நேரத்தில் வேகம் பூச்சியமும், முடுக்கம் 12 அலகுகளும் ஆகுமெனின், a, b-க்களின் மதிப்புகளைக் காண்க.

3.6. தொடர்புறு வீதங்கள் (Related rates)

பல கணக்குகளில் ஒவ்வொன்றும் நேரத்தின் சார்பலனாகிய இரண்டு மாறிகள் இடம் பெறுவதுண்டு. நேரத்தைப் பொறுத்து ஒரு மாறியின் பெருகுவீதம் கொடுக்கப்பட்டால் அதைக்கொண்டு மற்ற மாறியானது நேரத்தைப் பொறுத்துப் பெருகும் வீதத்தை அறியவேண்டியவர்களாகலாம். இது பின்வருமாறு செய்யப்படும்:

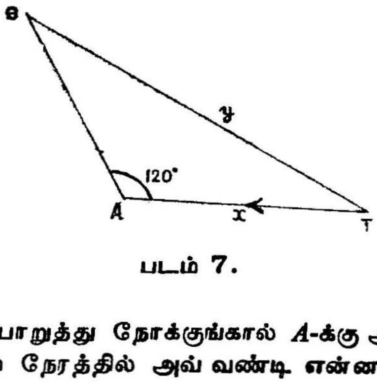
(i) முதலில் இரண்டு மாறிகளையும் தொடர்பு செய்யும் சமன் பாட்டைக் கண்டறிக. இச் சமன்பாட்டில் பிறவாகிய மாறிகள் சேருமானால், கணக்கில் கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளைக்கொண்டு அவையனைத்தையும் ஒரு சார்பற்ற மாறியைச் சார்ந்து நிற்குமாறு கொண்டுவருக.

(ii) அடுத்தபடியாக, நேரத்தையொட்டி இருபக்கங்களிலும் வகையீடு செய்க.

(iii) இறுதியாக, கொடுக்கப்பட்ட மாறியினது பெருகு வீதத்தைப் பிரதியிட்டு, வீதத்தை யறியவேண்டிய மாறியின் மதிப்பைப் புகுத்துக.

விளக்க உதாரணங்கள் :

(1) இரண்டு இருப்புப் பாதைகள் ஒன்றற்கொன்று $120°$ சரிவுடையன. A என்னும் சந்திப்பை நோக்கி ஒரு புகைவண்டி ஒரு பாதையில் மணிக்கு 28 மைல் வேகத்தில் ஓடிவருகின்றது. மற்ற பாதையில் A-விருந்து 3 மைல் தொலைவிலுள்ள B என்னும்



படம் 7.

நிலையத்தைப் பொறுத்து நோக்குங்கால் A-க்கு அப்பால் 5 மைல் தூரத்திலிருக்கும் நேரத்தில் அவ் வண்டி என்ன வேக வீதத்தில் வருவதாகத் தோன்றும்?

செய்முறை: T என்னும் புகைவண்டியானது t நேரத்தில் A-விருந்து x மைல் தூரத்திலும், B-விருந்து y மைல் தூரத்திலும் இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

அப்பொழுது $y^2 = x^2 + 3^2 - 2.3.\ x\cos 120° = x^2 + 3x + 9$.

t ஐப் பொறுத்து இருபக்கங்களிலும் வகையீடு காண,

$$2y\ \frac{dy}{dx} = 2x\ \frac{dx}{dt} + 3\ \frac{dx}{dt} = (2x+3)\ \frac{dx}{dt}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dt} = \frac{2x+3}{2y}\ \frac{dx}{dt}$$

இப்பொழுது $x = 5$ ஆகும்பொழுது,

$y^2 = 5^2 + 3 \times 5 + 9 = 49$ ஆகும்.

$$\therefore\ y = 7.$$

இதனோடு $\frac{dx}{dt} = 28$ ஆகும். $\therefore\ \frac{dy}{dt} = \frac{13}{14} \times 28 = 26$

$\therefore$ புகைவண்டியானது A-விருந்து 5 மைல் தொலைவிலுள்ள பொழுது B ஐ நோக்கி மணிக்கு 36 மைல் வேகத்தில் வருவதாகத் தோன்றும்.

(2) ஒரு வடிகட்டுங் காகிதமானது 12 செ. மீ. ஆழமும், 4 செ. மீ. ஆரமும் உடையதொரு வட்டமுகக் கூம்புருவை வடிவாக உள்ளது. அதனுள் நிமிடத்திற்கு 2.5 கன செ. மீ வீதம் ஒரு கலவை ஊற்றப்படுகிறது; அக் காகிதத்திலிருந்து 1 நிமிடத்திற்கு 1 க. செ. வீதம் தெளிந்த கலவை வெளிப்பட்டு வழிகிறது. அங்ஙனமாயின் ஊற்றிய கலவையானது கூம்புருவையின் முனையிலிருந்து மேலும் $\frac{2}{3}$ பங்கு ஆழமுள்ளபொழுது கலவையின் மட்டம் என்ன வீதத்தில் குறைவுறுவதாகுமெனக் கண்டறிக.

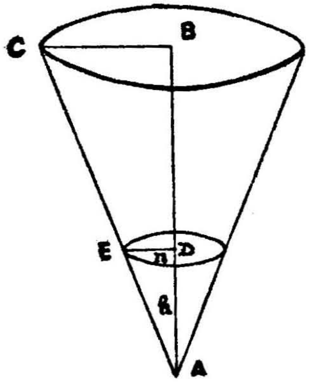
யாதொரு நேரத்திலேனும் (t), கலவையின் ஆழம் h செ.மீட்டரும் கலவையின் மேற்றளத்தின் ஆரம் r செ.மீட்டரும், கலவையின் கனபரிமாணம் V கன.செ.மீட்டருமாகக் கொள்க.

அப்பொழுது $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ஆகும்.

படத்திலிருந்து $\triangle ADE ||| \triangle ABC$ எனக் காண்கின்றோம்.

$$\therefore \frac{DE}{AD} = \frac{BC}{AB} \text{ அதாவது } \frac{r}{h} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore r = \frac{1}{3} h.$$



படம் 8.

வடிகட்டிய கழிவுபோக எஞ்சுறு கலவையின் கனபரிமாணம் நிமிடத்துக்கு 1.5 கன செ. மீட்டராகும்.

$$\text{அதாவது} \quad \frac{dv}{dt} = +1\cdot5$$

இது கொண்டு $h \times \frac{2}{3} \times 12 = 8$ செ.மீ. ஆகும்பொழுது $\frac{dh}{dt}$ ஐக் கண்டறிய வேண்டும்.

$$\text{இப்பொழுது} \quad \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{1}{27}, \pi . 3h^2 . \frac{dh}{dt}$$

$$= \frac{\pi}{9} h^2 . \frac{dh}{dt}$$

$$\therefore \frac{dh}{dt} = \frac{9}{\pi h^2} . \frac{dV}{dt}.$$

இங்கு $h = 8$; $\frac{dV}{dt} = \frac{3}{2}$ என்று பிரதியிட்டுக் கொண்டால்,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{9}{\pi \times 64} \times \frac{3}{2} = \frac{27}{128\pi} \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே, குறிப்பிட்ட கணத்தில் கலவையின் தலைமட்டமானது ஒரு நிமிடத்திற்கு $\frac{27}{128\pi}$ செ.மீ. வீதம் உயருவதாகும்.

3. ஒரு மையின் துளி மையொற்றும் காகிதத்தின்மேல் விழுந்த பொழுது மையின் கறையானது வட்ட வடிவினதாகி ஒரு செகண்டுக்கு 2 சதுர செ. மீ. வீதம் பரப்பு பெருகுவதாகின்றது. மைக்கறையின் பரப்பு 5 சதுர செ. மீ. ஆகவுள்ள பொழுது அதன் ஆரத்தின் பெருகு வீதத்தைக் காண்க.

செய்முறை:

t செகண்டுகள் கழிந்தபின் வட்டவடிவ மைக்கறையின் ஆரம் r செ. மீ. ஆகவும், பரப்பு A சதுர செ. மீ. ஆகவும் இருக்குமானல் $A = \pi r^2$ ஆகும்.

கணக்கின்படி $\frac{dA}{dt} = 2$

ஆகவே, $\frac{dr}{dt}$ கண்டறியப்படல் வேண்டும்.

இப்பொழுது,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\therefore \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\pi r} \frac{dA}{dt} = \frac{1}{\pi r} \text{ செ. மீ./விநாடி.}$$

$A = 5$ ஆகுமிடத்து $\pi r^2 = 5$.

$$\therefore \quad = r\sqrt{\frac{5}{\pi}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}}$$

$$\therefore \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\sqrt{5 . \pi}} .$$

$\therefore$ வட்டவடிவ மைக்கறையின் ஆரமானது விநாடிக்கு

$-\frac{1}{\sqrt{5\pi}}$ செ. மீ. வீதம் மிகுவதாகும்.

பயிற்சி 3.6

1. ஒரு விளக்குத் தூண் தரைக்குமேல் 12′ உயரமுள்ள தாகும். அதன் அடிப்பாகத்தின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு நேர்க் கோட்டின் வழியே தூணுக்கப்பால் நோக்கி $5\frac{1}{2}'$ உயரமுள்ள ஒரு மனிதன் விலகிச் செல்லுகின்றான். அவன் மணிக்கு 4 மைல் வேகத்தில் நடக்கும்பொழுது அவனது நிழல் எவ்வளவு விரைவாக நீளுவதாகும் ?

2. 6 செ. மீ. ஆரமும் 24 செ. மீ. உயரமுமுள்ளதொரு உருளை வடிவுடைய தொட்டியில் நீர் ஊற்றப்படுகின்றது. அதில் $\frac{1}{8}$ பங்கு நீராழம் உள்ளபொழுது நீர் மட்டம் என்ன வீதத்தில் உயருவதாகும் ?

3. 10′ நீளமுள்ளதொரு கழியானது தனது A, B என்னும் இரு முனைகளும் எப்பொழுதும் முறையே x, y அச்சுகளைத் தொட்டுக்கொண்டே நகரும் நிலைமையிலுள்ளது. A முனையானது ஆதியிலிருந்து 8′ தூரத்திலிருக்குங்கால் வினாடிக்கு 2′ வீதம் நகருவதாகின்றது. எனின், B முனையின் நகர்ச்சி வீதத்தைக் கண்டறிக.

4. ஒரு பந்தானது 64′ உயரத்திலிருந்து தரையை நோக்கி நழுவ விடப்படுகின்றது. சூரியனுடைய மேனோக்குக் கோணம் 30° ஆனால், தரை வழியே அதன் நிழலானது (i) 15′ உயரத் திலுள்ள பொழுதும் (ii) தரையைத் தாக்கு முன்னும் எவ்வளவு விரைவுடன் படருவதாகுமெனக் காண்க.

5. $y = x^2$ என்னும் வளைவரையின் மீது இயங்கும் ஒரு துகளானது X அச்சுக்கு ஒரு போகாகச் செகண்டுக்கு 2′ வீதம் நிகழும் வேகமுடையதாகும். $x = 3$ ஆகும் பொழுது y அச்சுக்கு ஒரு போகாக நிகழும் அதன் வேகத்தைக் காண்க.

6. கோள வடிவமாகிய ஒரு வாயுக் கூண்டு காற்றால் நிரப்பப் படும் பொழுது அதன் கன பரிமாணம் செகண்டுக்கு 4 கன அங்குல வீதம் மிகப்பெறுகின்றது. அதன் ஆரம் 5 அங்குலமாயி ருக்கும்பொழுது அதன் மேற்றளவுப் பரப்பு பெருகும் வீதத்தைக் கண்டறிக.

7. ஒரு வட்டமுகக் கூருருளை வடிவாகிய வடிகட்டும் காகிதமானது $1\frac{1}{2}''$ ஆரமும், 4″ ஆழமும் உடையன. அதிலிருந்து ஒரு நிமிடத்துக்கு 2 கன அங்குலம் வீதம் நீர் வடிந்து விழுகிறது.

நீராழம் $2\frac{1}{2}''$ ஆக இருக்கும் பொழுது நீர் மட்டம் என்ன வீதத்தில் இறங்குவதாகும்?

8. உயர நிறுத்திய குழாயின் வாய்ப்புழை வழியாகக் கொட்டுப் மணலானது எப்பொழுதும் அடியாரத்திற்குச் சமமாகிய உயரத்தை உடைய கூருருளை வடிவாகத் தரைமீது குவிகிறது. மணலானது விஞடிக்கு 6 கன அடி வீதம் விழும் பொழுது (i) உயரம் 5′ உள்ள பொழுதும், (ii) 3 விஞடியான பொழுதும் குவியலின் உயரம் எவ்வளவுக்கு விரைந்து எழுவதாகும்?

9. ஒரு கப்பலானது மற்ருெரு கப்பலுக்கு வடக்கே 50 மைல் தொலைவில் உள்ளது. முதற் கப்பல் கிழக்கு நோக்கி மணிக்கு 20 மைல் வீதம் செல்லுகிறது. இரண்டாவது கப்பலானது வடக்கு நோக்கி மணிக்கு 15 மைல் வேகத்தில் செல்லுகிறது. (i) $1\frac{1}{2}$ மணி கழிந்த பின் அவை யொன்றை யொன்று எவ்வளவு வேகத்தில் நெருங்கி வருவனவாகும்? அவை எவ்வளவு நேரம் ஒன்றை யொன்று நோக்கிச் செல்லுவனவாகும்?

10. ஒரு கல்லானது ஒரு குட்டையினுள் எறியப்படுகின்றது. அதனுல் உண்டாகும் அலைகள் வட்டவடிவமாகப் பரவுவனவானுல், அதன் வெளிப்புற அலையானது விஞடிக்கு $1\frac{1}{2}''$ பெருகுவதாகக் காணப்படுகிறது. அலையின் ஆரம் $10''$ ஆகவுள்ளபொழுது, அலை வட்டத்தின் பரப்பு எவ்வளவு விரைவாகப் பெருகுவதாகுமெனக் காண்க.

11. நீரில் சொரிந்த எண்ணெயானது வட்டவடிவத் துண்டாகப் பரவுகிறது. அதன் பரப்பு ஒரு நிமிடத்திற்கு 6 சதுர அங்குலம் வீதம் பெருகுகிறது. அங்ஙனமானுல், ஆரம் $2''$ ஆக உள்ளபொழுது அவ்வாரம் எவ்வளவு வேகமாக வளருவதாகும்?

12. ஒரு கோளத்தின் கன பரிமாணம் ஒரு விஞடிக்கு 2 கன செ.மீ. வீதம் பெருகுகிறது. அதன் கனபரிமாணம் 100 க. செ. மீட்டராகவுள்ள பொழுது அதன் ஆரமும் புறதளப் பரப்பும் என்ன வீதத்தில் பெருகுமெனக் காண்க.

4. தொகை காணலும் அதன் பிரயோகங்களும்

(Integration and its Applications)

4.1. வகை நுண்கணிதமானது xஐப் பொறுத்து $y = f(x)$ என்னும் கொடுக்கப்பட்ட சார்பலனுக்கு உரிய வகை கெழு அல்லது மாறுவீதத்தைக் கண்டறிய உதவிசெய்தது. தொகை நுண்கணிதமானது இதற்கு எதிர்நிலையான செய்வகையை அறிவிப்பதாகும். அதாவது, xஐப் பொறுத்து y-ன் மாறுவீதம் அறியப்பட்டால், அதுகொண்டு xஐப் பொறுத்து y-ன் சார்பலனைக் கண்டறிவதாகும். வேறு வகையாக மொழிவதானால், ஒரு சார்பலனின் வகை கெழுவைக் கொண்டு அச் சார்பலனின் மூல வடிவத்தையே கண்டறிதலாகுமென்க.

(1) வகை கெழுவைக் கொண்டு மூலச் சார்பலனைக் கண்டறியும் செய்முறையானது தொகை காணல் எனப்படும்.

உதாரணம் :

$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$ ஆதலின், xஐச் சார்த்தி $3x^2$-ன் தொகை (integral) x^3 என்று கூறுகிறோம். இதனை $\int 3x^2\, dx = x^3$ என எழுதுகிறோம்.

மறுபடியும் $\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$ ஆதலின், $\int \cos x\, dx = \sin x$ என்று சொல்லுகின்றோம்.

பொதுவாக, $f'(x) = \phi(x)$ ஆனது $f(x) = y$-ன் xஐப் பொறுத்து வகை கெழுவாகும். அப்பொழுது yஐ $f'(x)$-ன் அதாவது x ஐப் பொறுத்து $\phi(x)$-ன் தொகை என்கிறோம். இதனை

$$y = \int f'(x)\, dx \int = \phi(x)\, dx$$

எனக் குறியீடு செய்து வரைகிறோம். இவ்வாருக, $\frac{dy}{dx}$ $\phi(x)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டு, y-ன் மதிப்பைக் கண்டறியக் கேட்கப்பட்டபொழுது $y = \int \phi(x)\,dx$ எனக் குறித்துக் கொள்ளுகிறோம்.

குறிப்பு : $\int$ என்னுங் குறியானது தொகைக் குறியெனப்பட்டு செய்ய வேண்டிய தொகை காணும் முறைக்குப் பிரதியாக நிற்பதாகும். $\phi(x)$ என்பது தொகைச் சார்பு (integrand) என்பதையும், dx என்பது மாறி அல்லது தொகை காணலின் x பாத மூலம் (base x) என்பதையுங் குறிக்கும். இது தொகை காணலாகிய செய்முறையில் முக்கியமான (பிரதான) பகுதியாகும். கிடைக்கும் $f(x)$ என்னும் சார்பலனது வரையறைப்படா தொகையீடு அல்லது x ஐப் பொறுத்த $\phi(x)$-ன் மூலம் எனப்படும். $\int \ldots dx$ என்னுங் குறியானது $\frac{d}{dx}$ என்னுங் குறியீட்டைப்போல் ஒருவகை செய்முறையையே குறித்துக்காட்டி நிற்பதாகும். இவ்விருவகையான செய்வகைகளும் ஒரு சார்பலனைச் சார்த்தித் தொடர்ந்து செயல்படுங்கால், ஒன்றுக்கொன்று எதிர்நிலைப்பட்டு, ஒன்றையொன்று சரிக்கட்டுவதாகி (neutralize), அச்சார்பலனைப் பாதிக்காமல் நிற்கச் செய்வனவாகும்.

$$\text{ஆகவே, } \frac{d}{dx}\left[\int \phi(x)\,dx\right] = \frac{d}{dx} f(x) = \phi x$$

எனப் பெறுகின்றோம்.

கொடுக்கப்பட்ட உதாரணங்களில், நாம் $f(x)$ என்னும் ஆதாரச் சார்பலனிலிருந்து தொடங்கி, அதன் வகை கெழு $\phi(x)$ ஐப் பெற்று. இதிலிருந்து சுலபமாக $\int \phi(x)dx$-ன் மதிப்பாகிய $f(x)$ஐ எழுதினோம். ஆனல், இவ்வதிகாரத்தின் நோக்கமாவது $f(x)$ஐ முன்கூட்டி அறியாமலேயே $\int \phi(x)\,dx$ ஐ மதிப்பிடுவதாகும்.

(2) வரையறைப்படாத பொதுத்தொகைகள் (Indefinite general integrals) :

$\phi(x)$ என்பது $f(x)$-ன் வகை கெழுவானல், அது $f(x) + C$-ன் வகை கெழுவுமாகும் (C என்பதொரு மாறிலியாகும்). ஒரு மாறிலியின் வகை கெழு பூச்சியமாதலின் என்க. ஆகவே, x ஐப் பொறுத்து $\phi(x)$-ன் தொகையைப் பொதுவாக $f(x) + C$ என்றெழுதிக் கொள்ளலாம். இம்மாறிலியானது

தொகையீட்டு மாறிலியெனப்படும் (Constant of Integration). கணக்கில் கொடுத்த நிபந்தனைகளால் கட்டுப்படாவிடத்து அம் மாறிலியானது எத்தகைய மதிப்பையேனும் எய்தக் கூடிய தாகும். இப்பொழுது $f(x) + C$ ஆனது $\phi(x)$-ன் வரையறுக்கப் படாத பொதுத் தொகையாகும். ஏனெனில், அது மிகப்பொது வான தொகைப்பேருயினும், C-ன் மதிப்பானது வரையறைப் படாது கிடத்தலின் என்க.

இவ்வாருகவே, xஐப் பொறுத்து $4x^3$-ன் பொதுத் தொகை (integral) ஆனது $x^4 + C$ ஆகும். இங்கு C என்பது யாதாமொரு மாறிலியாகும். C-க்கு -1 அல்லது $3\frac{1}{2}$ என்னும் குறிப்பிட்ட மதிப்புகளைக் கொடுப்பதனுல் $x^4 - 1$ அல்லது $x^4 + 3\frac{1}{2}$ என்னும் சிறப்புத் தொகைகளைப் பெறுகிறேம்.

குறிப்பு : இதனது வடிவ கணித ரீதியான கருத்தைத் தெளிவுறல் வேண்டும். $y = x^2$; $y = x^2 + 1$: $y = x^2 + 2$ என்னும் வளைவரைகளொவ்வொன்றிற்கும் சரிவு $2x - y$ ஆகும். சரிவு $2x$ என்று மட்டும் கூறப்பட்டிருந்தால், அதற்கு இயைபுடைய தொரு வளைவரையின் பொது வடிவத்தையே குறிக்கொள்ளுவ தன்றி, எந்த வளைவரைவு கருத்துட் கொள்ளப்பட்டுள்ளதென் பதை நிச்சயிக்க முடியாது. உண்மையாக, (x, y) என்னும் எப் புள்ளியிடத்தேனும் $2x$ சரிவுடையதொரு வளைவரைவினது சமன் பாடானது $y = x^2 + C$ என்றே குறிக்கப்பெறும். இவை C-ன் பல வகையான மதிப்புகளுக்கு ஏற்புடையவாக விளங்கத்தக்கன வாய், நிலைத் தூரங்களினூடே அளக்கப்படுங்கால், தொலைவொத்து நிற்கும் பல பரவளைகளின் தொகுதியையே சுட்டி நிற்கும்.

ஆனல், $x = 0$ ஆகும்பொழுது $y = 3$ எனத் தெரிதலுற்ருல் $y = x^2 + 3$, குறிப்பிற்கொண்ட சிறப்பான வளைவரையை அறியலாம். கொடுக்கப்பட்டதொரு சரிவை அளவிலாத வளை வரைகள் பெறுமாயினும், $(0, 3)$ என்னும் புள்ளியின் வழியாகச் செல்லக்கூடிய வளைவரை யொன்றே யிருத்தல்கூடும்.

4.2. நியம வடிவங்கள் (Standard Forms)

(1) $\phi(x)$ என்னுஞ் சார்பலனின் தொகையைப் பெறுமிடத்து, எச்சார்பலனுனது வகை கெழு கண்டவிடத்து $\phi(x)$ஐத் தரு மென்னும் வினுவை யெழுப்பிக் கொள்ளுகின்ரேம். அறியப்பட்ட வகை கெழுக்களின் பலன்களைச் சோதித்தறிந்து, அறியப்பட்ட தொகைகளுக்கு ஒரு பட்டியலைத் தயாரித்துக் கொள்ளுகிரேம். மேற்படி பட்டியலில் காணப்படாத தொகைச் சார்பைத் தொகை

காணுதற்கு ஏற்றதாகும் வடிவத்தில் மாற்றியமைத் தெழுதி, நியம வடிவங்களைச் சாதனமாகக் கொண்டு தொகை கண்டறியலாம். ஒரு தொகையினது பலனில் தவறில்லை யென்பதனைக் துணிதற்குரிய சோதனையாவது தொகையின் வகை கெழுவான அத் தொகைச் சார்புக்குச் சமமாக விருத்தலைக் கண்டறிதலேயாகும்.

(2) பகுதி 2.5-ன் (i), (ii), (iii), (iv)-களில் நிச்சயித்த பலன்களிலிருந்து நேரடியாக வருவித்தவற்றைப் போலவே பின் வருந் தேற்றங்களைப் பெறுகின்றோம் :

தேற்றம் (i) : ஒரு மாறிலியின் வகை கெழுவானது பூச்சியமாதலின், $\int 0\, dx = C$.

தேற்றம் (ii) : $\int 1\, dx$ அல்லது சுருக்கமாக, $\int dx = x$.

தேற்றம் (iii) : $\int u \pm v \pm w \ldots dx = \int u dx \pm \int v dx \pm \ldots$ இங்கு $u, v, w \ldots\ldots$ என்பன xஐப் பொறுத்த சார்பலன்களாகும். இத்தேற்றத்திலிருந்து x-ன் பல்லுறுப்புக் கோவையின் தொகையானது அதிலுள்ள உறுப்புகளுக்கு ஒன்றன் பின் ஒன்றுகத் தொகை கண்ட றிந்து அவ்வாறறிந்த தொகைகளின் இயற்கணித கூட்டுப் பலனைத் திரட்டிக் கொள்ளுவதாகும்.

தேற்றம் (iv) : $\int C f(x)\, dx = C \int f(x)\, dx$

அதிகப் பொதுவாக $\int \{C_1 f(x) + C_2 \phi(x) + C_3 \psi(x) \ldots\}\, dx$

$$= C_1 \int f(x)\, dx + C_2 \int \phi(x) + C_3 \int \psi(x) + \ldots\ldots$$

(3) தொகைகளின் நியம அட்டவணை (Standard Table of Integrals) :

I. $y = x^7$ ஆகும் பொழுது, $\dfrac{dy}{dx} = 7x^6$; $\therefore \int 7x^6\, dx = x^7$.

இதிலிருந்து $\int x^6 dx = \dfrac{x^7}{7}$ எனப் பெறப்படும்.

மிகப் பொதுவாக $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, இதில் C என்பது தொகை காணலின் மாறிலியாகும். (இப்பொதுப் பலனுனது வலப் பக்கத்திலுள்ளதனை x ஐப் பொறுத்து வகை கெழு கண்டறிந்து சரிபார்த்தல் வகையால் சோதிக்கப்படும்.)

மறுபடியும் $y = (ax + b)^5$ ஆகும்பொழுது,

$$\frac{dy}{dx} = 5a\ (ax + b)^4 \text{ எனப் பெறுகிறோம்.}$$

ஆகையால், $\int 5a\,(ax + b)^4\,dx = (ax + b)^5$.

இதிலிருந்து $\int (ax + b)^4\,dx = \dfrac{(ax + b)^5}{5}$ எனக் கிடைக்கப் பெறும்.

மிகப் பொதுவாக, $\int (ax + b)^n\,dx = \dfrac{(ax + b)^{n+1}}{(n + 1)\,a} + C$

இங்கு C ஆனது தொகை காணலின் மாறிலியாகும்.

குறிப்பு 1 : $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n + 1} + C$ என்பது $n = -1$ ஆதலின்றி முழுவெண்ணுகவோ, பின்னமாகவோ, மிகையல்லது குறை இராசியாகவோ பெறும் எல்லா நிச மதிப்புகளுக்கும் பொருந்துவதாகும். பகுதி 2·4 குறிப்பு 2-ல் இருந்து n-ன் -1 மதிப்புக்கு இப்பலன் ஏன் பொருந்தாதென்பதனை யறிகின்றோம்.

குறிப்பு 2 : $\int x^{-1} dx = \log x$ (மாணவர்கள் இப்பலனை உடன் பாடாக்கிக் கொள்ளலாம்.)

குறிப்பு 3 : ஒரு மாறியினது வகை கெழு அதனைப் பொறுத்த வகையில் 1 ஆகும்.

இவ்வாறுகவே, $\dfrac{d}{dx}(x) = 1;\quad \dfrac{d}{dy}(y) = 1;\quad \dfrac{d}{dz}(z) = 1$

எனப் பிறவும் ஆகும்.

ஆகவே, $\int 1\,dx = x;\quad \int 1\,dy = y;\quad \int 1\,dz = z.$

இதனோடு $\int a\,dx = a\int dx = ax.$

எனவே, தொகையானது முழுவடிவில் குறிப்பிடப்பட வேண்டுமானல், அதன் அடி (base) வடிவுற்றிருத்தல் இன்றியமையாததாகின்றது.

சரிபார்க்க :

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x};\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x};\ \int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}$$

II. $\frac{d}{dx}\{\sin(ax+b)\} = a\cos(ax+b)$ ஆதலின்,

$\int a\cos(ax+b)\,dx = \sin(ax+b)$ எனப் பெறுகின்றோம்.

$\therefore \quad \int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b).$

கிளை 1 : $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$

கிளை 2 : $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

III. $\frac{d}{dx}\{\cos(ax+b)\} = -a\sin(ax+b)$ ஆதலின்,

$\int -a\sin(ax+b)\,dx = \cos(ax+b)$

$\therefore \quad \int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$

கிளை 1 : $\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$

கிளை 2 : $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

IV. பின்வரும் பயன்களும் குறித்துக் கொள்ளுதற்குரியன வாகும்:

(i) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ ஆதலின், $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

(ii) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\text{cosec}^2 x$ ஆதலின், $\int \text{cosce}^2 x\,dx$

$= -\cot x + C$

(iii) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ ஆதலின், $\int \sec x \tan x\,dx$

$= \sec x + C$

(iv) $\frac{d}{dx}(\text{cosec}\,x) = -\text{cosec}\,x \cot x$ ஆதலின்

$\int \text{cosec}\,x \cot x\,dx = -\text{cosec}\,x + C$

(v) $\frac{d}{dx}(uv) = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$

ஆதலின், $\int\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right)dx = uv + C$

(vi) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right) / v^2$ ஆதலின்,

$$\int\frac{\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{du}{dx}\right)}{v^2}dx = \frac{u}{v} + C.$$

விளக்க உதாரணங்கள்

(1) மதிப்பிடுக :

$$\int(2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5)\,dx$$

தொகை $= \int 2x^5\,dx - \int 3x^3\,dx + \int 4x^2\,dx - 5\int dx$

$= 2\int x^5\,dx - 3\int x^3\,dx + 4\int x^2\,dx - 5\int dx$

$= \frac{2x^6}{6} - \frac{3x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - 5x + C$

$= \frac{x^6}{3} - \frac{3x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - 5x + C$

(2) θ ஐப் பொறுத்து $\sin^2\theta$-ன் தொகையைக் காண்க :

$\int\sin^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int 2\sin^2\theta\,d\theta$

$= \frac{1}{2}\int(1 - \cos 2\theta)\,d\theta$

$= \frac{1}{2}\Big[\int d\theta - \int\cos 2\theta\,d\theta$

$= \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right) + C$

$= \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} + C\Big]$

(3) (x, y) என்னும் யாதேனுமொரு புள்ளியிடத்து ஒரு வளைவரையின் சரிவு $3x-2$ ஆகும்; அவ்வளைவரை $(2, -1)$ புள்ளிவழியாகச் செல்லுவதாயின், அதன் சமன்பாட்டைக் கண்டறிக.

ஒரு வளைவரையின் சரிவு அதன்மீதுள்ள யாதேனுமொரு (x, y) புள்ளியிடத்து $\frac{dy}{dx}$ எனக் கொடுக்கப்படுகின்றது.

கணிதத்தின்படி $\frac{dy}{dx} = 3x - 2$; $x = 2$ ஆகும்பொழுது $y = -1$ இவற்றைக் கொண்டு y-ன் மதிப்பை அறியவேண்டும்.

$$\frac{dy}{dx} = 3x-2 \text{ ஆதலின், } y = \int (3x-2)\, dx$$

$$= \frac{3x^2}{2} - 2x + C$$

$x = 2$; $y = -1$ ஆகும்பொழுது,

$$-1 = \frac{3(2)^2}{2} - 2(2) + C \quad \therefore \quad C = -3$$

ஆகவே, கொடுத்த நிபந்தனைகளுக்கு ஏற்றதாகிய வளைவரையின் சமன்பாடு

$$y = \frac{3x^2}{2} - 2x - 3$$

அல்லது $2y - 3x^2 + 4x + 6 = 0$ ஆகும்.

குறிப்பு: வகையீட்டுக் குணகங்களைப் பெற்றிருக்கும் ஒரு சமன்பாடானது வகையீட்டுச் சமன்பாடெனப்படும். மேற்கண்ட கணக்கில் ஒரு வளைவரையினியல்பை அதன் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டிலிருந்து அறிந்தோம்.

(4) ஒரு துகளானது ஒரு சீரான முடுக்கம் f உடன் ஒரு நேர்க்கோட்டில் இயங்குங்கால் t செகண்டில் s தூரம் சென்றபொழுது அதன் வேகம் v ஆகின்றது. தொடக்கத்தில் $t = 0$, $s = 0$, $v = u$ எனக்கொண்டு s-க்கும் t-க்கும் உள்ள தொடர்பைக் கண்டறிக.

t நேரத்தில் வேகம் v ஆகும். $\therefore$ முடுக்கம் $\frac{dv}{dt}$ ஆகும்.

கணக்கின்படி $\frac{dv}{dt} = f$; $\therefore$ $v = \int f\, dt = f \int dt = ft + C$

$t = 0$; $v = u$ ஆகும்பொழுது, $C = u$ ஆகும்.

$$\therefore \quad v = u + ft \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \qquad (1)$$

அதாவது, $\dfrac{ds}{dt} = u + ft$ இத்தொடர்பை t ஐப் பொறுத்துத் தொகை காண,

$$s = \int (u + ft)\, dt = ut + \frac{ft^2}{2} + C \text{ ஆகும்.}$$

$t = 0$, $s = 0$ ஆகுமிடத்து $C = 0$ ஆகும்.

$$\therefore \quad s = ut + \tfrac{1}{2} ft^2. \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \qquad (2)$$

குறிப்பு: (1) (2)-களிலிருந்து tஐ விடுவிக்க,

$v^2 = u^2 + 2fs$ எனக் கிடைக்கப் பெறுகின்றோம். ... (3)

(3)-வது சூத்திரம் தனிப்பட்ட முறையிலும் பின்வருமாறு கண்டறியப்படும்:

$$\frac{dv}{dt} = f \text{ அதாவது, } \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = f$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{ds} \cdot v = f \text{ அதாவது, } v\frac{dv}{ds} = f$$

இருமருங்கினும் Sஐப் பொறுத்துத் தொகை காணவே,

$$\int v \frac{dv}{ds} \cdot ds = \int f\, ds \text{ எனப் பெறுகின்றோம்.}$$

அதாவது $\int v\, dv = \int f ds = f \int ds$

$$\therefore \quad \frac{v^2}{2} + C_1 = fs + C_2$$

$$\therefore \quad \frac{v^2}{2} = fs + (C_2 - C_1) = fs + K$$

($K = C_2 - C_1$ என்க).

ஆரம்பத்தில்

$s = 0$ ஆகும்பொழுது $v = u$ ஆதலின்,

$$K = \frac{u^2}{2} \qquad \therefore \quad \frac{v^2}{2} = fs + \frac{u^2}{2}$$

$$\therefore \quad v^2 = u^2 + 2fs$$

மேலே பெறுவித்த (1), (2), (3) ஆகிய சமன்பாடுகளும் சேர்ந்து இயக்கநிலைச் சமன்பாடுகளெனப்படும்.

பயிற்சி 4.1

1. x ஐப் பொறுத்துப் பின்வருவனவற்றிற்குத் தொகை காண்க :

(i) $(3x-2)^5$ (ii) $(3-4x)^7$

(iii) $(x^2-x+1)(x^2+x+1)$ (iv) $\sin\left(\frac{1}{3}x-2\right)dx$

(v) $3x^2+\sin 2x$ (vi) $(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})5a^2$

(vii) $(4-5x)^3+\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\cos(3-5x)+\frac{1}{x^5}-2$

(viii) $4\cos(3x-2)+3\sin(2x-5)$ (ix) $\cos x^0$

(x) $\cos^2 x$ (xi) $\sin^3 x$ (xii) $\sin 2x \sin 3x$

(xiii) $\cos x \cos 3x$ (xiv) $\cos 4x \sin 2x$

(xv) $\sin x \cos 2x \cos 3x$

2. மதிப்பிடுக : (i) $\int (x^2+x+1)dx$

(ii) $2\int \cos 3x\, dx$

3. $\frac{dy}{dx} = x^3$-ம்; $x=1$ ஆகுமிடத்து $y=1$-ம், ஆகுமெனின் yஐ x உடன் சார்த்திக் கூறுக.

4. (i) $f'(x) = a^2-3x+4$-ம், $f(0)=3$-ம் ஆனால் $f(-2)$ ஐக் கண்டறிக.

(ii) $\frac{dy}{dx} = 1-x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{4}}$-ம், $x=1$ எனின் $y=-1$ ஆகுமானால், yஐ x-ன் சார்பாகக் கூறுக.

(iii) $\frac{d^2y}{dx^2} = 4-21x+10x^3$ ஆகும். மேலும், $x=1$

ஆகுமிடத்து $y = 5$-ம் $\frac{dy}{dx} = 3$-ம் ஆகுமானல், y-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(iv) $\frac{d^2y}{dx^2} = K(l^2 - 2lx + x^2)$ ஆகும். $x = 0$ ஆகும் பொழுது y-ம், $\frac{dy}{dx}$-ம் மறையும். [K ஒரு மாறிலியாகும்.] எனின், xஐச் சார்த்தி yஐ மதிப்பிடுக.

5. $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஆனது x-க்கு ஏற்ப வேறுபடுதலைப் பெறும் ஒரு வளைவரையானது $(1, 0)$ வழியாகச் சென்று, $y = 2x - 1$ ஐ $(2, 3)$ என்னுமிடத்தில் தொட்டு நிற்பதாகுமானல், அதன் சமன்பாட்டைக் கண்டறிக.

6. பயிற்சி 3·4-லுள்ள 4 (i), 4 (ii) கணக்குகளைச் செய்க.

7. y என்பது x-ன் சார்பலனய் வகை கெழு $2x - 5$ உடையதாகியும், மீச்சிறு மதிப்பு $-\frac{1}{4}$ பெறுவதாகியும் உள்ளதானல், yஐக் கண்டறிக.

8. நேர் மேலதாக எறியப்பட்டதொரு துகளானது t செகண்டுகளில் $(32 + 16t)$/அடி/செகண்டு^{2} முடுக்கத்திற்குள்ளாகின்றது. அது செகண்டுக்கு $40'$ ஆரம்ப வேகத்துடன் புறப்படுமானல், அது எவ்வளவு உயரம் எழக் கூடும் ?

9. ஒரு நேர்க்கோட்டில் இயங்குவதொரு துகளின் வேகமானது t செகண்டுகளில் $v = 60 - 32t + t^2$ எனக் கொடுக்கப்படுகின்றது. அக்கோட்டிலுள்ள 0 என்னும் நிலையான புள்ளியிலிருந்து 1 செகண்டில் அது விலகியுள்ள தூரம் $44'$ ஆகும். எனில், 3 செகண்டுகள் கழிந்தபின் 0-லிருந்து அத்துகள் உள்ள தூரத்தைக் கண்டறிக.

10. நேர்க்கோட்டில் செல்லும் ஒரு பொருளின் வேகம் t செகண்டுகள் கழிந்தபின் $4\pi \cos nt + 3\pi \sin nt$ அங்/வினடி ஆகும். $t = 0$ ஆகும்பொழுது அக்கோட்டிலுள்ளதொரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து அது விலகியுள்ள தூரம் 2 ஆகும். புறப்பட்டதிலிருந்து 1 செகண்டு கழிந்தபின் அப்பொருள் நிலைப் புள்ளியிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்திலிருக்குமெனக் காண்க.

11. மதிப்பிடுக :

(i) $\int(2x+3)^2dx$ (ii) $\int 3\cos 4x\, dx$

12. மதிப்பை யறிக :

(i) $\int(x+1)(x^2-1)\,dx$

(ii) $\int 4(\sin x-\frac{1}{2})\,dx$

13. மதிப்பிடுக : $\int(x+2)(x-3)\,dx$

14. மதிப்பிடுக :

(i) $\int(x+2)^2\,dx$ (ii) $\int \sin\frac{x}{3}\,dx$

15. தொகை காண்க :

(i) $\int(x^2+3x+5)\,dx$ (ii) $\int\sin 2x\,dx$.

16. xஐப் பொறுத்துத் தொகை அறிக :

(i) $(5x+6)^2$ (ii) $\sin^2 x$.

17. கண்டறிக :

(i) $\int\sin 2x\cos 3x\,dx$ (ii) $\int(x-2)(x+1)\,dx$

18. xஐப் பொறுத்துத் தொகை காண்க :

(i) $(2x-7)^6$ (ii) $\sin(2x+3)-\cos 3x$

19. xஐப் பொறுத்துத் தொகை காண்க :

(i) $(5x+6)(2x^2+3x+4)$ (ii) $\sin^3 x$

20. xஐப் பொறுத்துத் தொகை காண்க :

(i) $(5x-8)^{10}$ (ii) $\cos^2 x$

21. xஐப் பொறுத்துத் தொகை காண்க :

(i) $2x^4-3x^3$ (ii) $2\sin 3x-7\cos 2x$

22. $x=0$ ஆகும் பொழுது $\frac{dy}{dx}=x^2$; $y=1$ ஆகுமெனக் கொடுக்கப்பட்டது கொண்டு, yஐ x-ன் சார்பாகக் கூறுக.

23. (a) xஐப் பொறுத்துத் தொகை அறிக:

(i) x^2+x (ii) $\sin 2x + \cos 3x$

(b) (0, 1) என்னும் புள்ளி வழிச் செல்லுவதாயும், (x, y) என்னுமிடத்தில் $(1-2x^2)$ சரிவுடையதாயும் உள்ள ஒரு வளைவரையின் சமன்பாட்டைக் கண்டறிக.

24. (a) xஐப் பொறுத்துத் தொகை காண்க:

(i) x^3-x (ii) $2\sin 2x + 3\cos 3x$

(b) ஒரு வளைவரையானது x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $(2x - \frac{1}{2}x^2)$ சரிவுடையதாயும், (0, 1) வழிச்செல்லுவதாயும் உள்ளதாகுமானால், $x = 3$ என்னுமிடத்தில் அதன் நிலைத்தூரம் என்ன?

25. xஐப் பொறுத்துத் தொகை காண்க:

(i) $(1-2x)^3$ (ii) $\cos 2x + 3\sin 3x$

26. xஐப் பொறுத்துத் தொகையறிக:

(i) $(x-1)^3$; (ii) $3\sin 3x - 4\cos 2x$

27. xஐப் பொறுத்துத் தொகையறிக:

(a) (i) $(1-3x)^5$ (ii) $3\cos 2x + 5\sin 5x$

(b) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x + 5$; $x = 2$ எனின், $y = 5$ ஆகும்.

y-ன் மதிப்பை xஐச் சார்த்திக் கூறுக.

28. xஐப் பொறுத்துத் தொகையறிக:

(i) $2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 19x^2 + 100x + 97$

(ii) $2\sin 2x - 5\cos 7x$

29. மதிப்பைக் காண்க:

(i) $\int (1-x)^2 (2-3x)\, dx$

(ii) $\int \sin^2 3x\, dx$

30. மதிப்பைக் கண்டறிக:

(i) $\int (1+3x^2)(3-4x)^3\, dx$

(ii) $\int \sin 2x \cos 3x\, dx$

31. காண்க :

$$\int [\cos 3x + (1 - x)^3]\, dx$$

32. காண்க :

$$\int \cos^3 x\, dx$$

33. xஐப் பொறுத்துத் தொகை காண்க :

$$(2x^2 + 3)^3$$

4.2. பிரதியிடல் முறையால் தொகை காணல் (Integration by substitution)

மதிப்பிடுதற்கண் இடர்ப்பாடு விளைக்கும் சில குறிப்பிட்ட தொகைகளைத் (integrals) தக்கபடி பிரதியீடு செய்தலால் நியம வடிவங்களுக்கு உட்படக் கொண்டு வரலாம்.

y ஆனது x-ன் சார்பலனாகியும், x ஆனது u-ன் சார்பலனாகியும் விளங்கினால், y ஆனது u-ன் சார்பலனாக அமைதலை அறிவோம். அப்பொழுது

$$\frac{df(x)}{du} = \frac{d}{dx} f(x) \cdot \frac{dx}{du} = \phi(x) \frac{dx}{du}$$

$$\left[\frac{d}{du} f(x) = \phi(x) \text{ என்றிடுதலால்.} \right]$$

xஐ ஒட்டி இரு பக்கங்களிலும் தொகை காண

$$f(x) = \int \phi(x) \frac{dx}{du} \cdot du \text{ எனப் பெறுகின்றோம்.}$$

ஆனால், $\frac{d}{dx} f(x) = \phi(x)$ ஆதலின்

$$f(x) = \int \phi(x)\, dx \text{ எனப் பெறுகின்றோம்.}$$

ஆகவே, $\int \phi(x)\, dx = \int \phi(x) \frac{dx}{du} \cdot du$

என்னும் முக்கியமான தேற்றத்தைப் பெறுகின்றோம்.

இவ் விதியானது தொகை காணலின் மாறியை $\frac{dx}{du} \cdot dx$ எனப் பதிலீடு செய்தலால் x-லிருந்து u-க்கு மாற்றலாம்.

விளக்க உதாரணங்கள்

(1) மதிப்பிடுக: $\int \sin 2x\, dx$

செய்வகை :

$2x = u$ என்றிடுக. $\therefore\ 2\dfrac{dx}{du} = 1$

$$\therefore\ \frac{dx}{du} = \frac{1}{2}$$

ஆகவே, $\displaystyle\int \sin 2x\, dx = \int \sin u\ \frac{dx}{du}\,.\,du = \int \sin u\,.\,\frac{1}{2}\,du$

$$= \frac{1}{2}\int \sin u\, du = -\frac{1}{2}\cos u + C$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2x + C$$

(2) xஐப் பொறுத்து $x\sqrt{x^2+1}$-ன் தொகையைக் காண்க :

செய்வகை :

$x^2 + 1 = u$ என்றிடுக.

u-ஐச் சார்த்தித் தொகை காண $2x\dfrac{dx}{du} = 1$ எனப் பெறுகிறோம்.

$$\therefore\ \frac{dx}{du} = \frac{1}{2x}.$$

$$\therefore\ \int x\sqrt{x^2+1}\ dx = \int x\sqrt{x^2+1}\ \frac{dx}{du}\,.\,du$$

$$= \int x\sqrt{x^2+1}\,.\,\frac{1}{2x}\,.\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int x\sqrt{x^2+1}\ du$$

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\ du$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{u^{\frac{3}{2}}}{1\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\,.\,u^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

(மறுபடியும் பிரதியீடு செய்தலால்)

(3) மதிப்பறிக :

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

செய்வகை :

$x = a\sin\theta$ எனப் பிரதியிடுதலை மேற்கொள்ளுவோம்.

$$\therefore \quad \frac{dx}{d\theta} = \cos\theta$$

இப்பொழுது

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} = \int \sqrt{a^2 - x^2}\ \frac{dx}{d\theta} \cdot d\theta$$

$$\int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta} \cdot a\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int a\cos\theta \cdot a\cos\theta \cdot d\theta$$

$$= a^2 \int \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2\theta)\, d\theta.$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right) + C.$$

$$= \frac{a^2}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta) + C.$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + C\right.$$

(திரும்பவும் பிரதியிடுதலால்)

$$= \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

குறிப்பு 1 : இப் பயன் அடுத்த அத்தியாயத்தில் பயன் படுத்தப்படும்.

குறிப்பு 2 : தொகைச் சார்பானது $\sqrt{a^2-x^2}$ என்னும் வடிவுடைய மூலக்குறியைப் (radical sign) பெற்றிருக்குமானால், $x=a \sin\theta$ என்னும் பிரதியீட்டைப் பயன் கொள்ளுவோம். மூலக் குறியானது $\sqrt{a^2+x^2}$ என்னும் வடிவினதானல், $x=a \tan\theta$ என்றும், $\sqrt{x^2-a^2}$ என்னும் வடிவினதானல் $x=a \sec\theta$ என்றும் பிரதியீடு செய்யலாம்.

குறிப்பு 3 :

(i) $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ என்பதனை மதிப்பிட :

(அ) m, n என்னும் இரண்டும் ஒற்றையிராசி முழு எண்களானல், ஏதேனுமொரு கோணச் சமன்பாட்டை u-க்குச் சமமாக இடலாம்.

(ஆ) m அல்லது n ஒற்றைப்படை முழுவெண்ணானல், இரட்டைப்படையுடைய கோணச்சார்பலனை u-க்குச் சமமாக இடலாம்.

(இ) m, n என்னும் இரண்டும் இரட்டை முழுவெண் இராசிகளானல் $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$; $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ என்னுங் கோண மதிப்புகளைத் தொடர்புறுத்தலாம்.

(ii) $\int \sin^m x\, dx$ ஐ மதிப்பிட :

sine-ன் படியானது ஒற்றையிராசியானல், $u=\cos x$; $\sin^2 x = 1-u^2$ என்றிடுக.

m ஆனது இரட்டையிராசியானல், $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ என்றிடுக.

(iii) $\int \cos^m x\, dx$ ஐ மதிப்பிட :

cosine-ன்படி ஒற்றையிராசியானல் $u=\sin x$;

$\cos^2 x = 1-u^2$ என்றிடுக.

m ஆனது இரட்டையிராசியானல், $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ என்றிடுக.

பயிற்சி 4.2

மதிப்பையறிக :

1. $\int \sin^5 x \, dx$
2. $\int (2x^2 - 5)^3 x \, dx$
3. $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, x \, dx$
4. $\int (2x^2 - 3x + 4)(4x - 3) \, dx$
5. $\int \frac{x^2 \, dx}{(1 + x^3)^2}$
6. $\int \frac{x dx}{(ax + b)^{\frac{3}{2}}}$
7. $\frac{(2x + 1) \, dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$
8. $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
9. $\frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
10. $\frac{x^3 dx}{\sqrt{1 - x^2}}$
11. $\int \sqrt{(x^2 + 2x + 3)}(x + 1) \, dx$
12. $\int \sin^3 x \cos x \, dx$
13. $\int \sin x \cos^3 x \, dx$
14. $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$
15. $\int \cos^2 x \sin^4 x \, dx$
16. $\int \sin^4 \theta \, d\theta$
17. $\int \sin^3 x \, dx$
18. $\int \cos^5 x \, dx$
19. $\int \sec^4 \theta \, d\theta$
20. $\int x^2 \cos x^3 \, dx$
21. $\int x^2 (ax^3 + b)^3 \, dx$

5. வரையறுத்த தொகையும் அதன் பிரயோகங்களும்

(The Definite Integral And its Applications)

5.1. வரையறுத்த தொகை : விவரணம் :

வரையறைப்படாததொரு தொகையில் ஒரு மாறியின் இரண்டு குறிப்பிட்ட மதிப்புகளுக்குத்தக அதற்குளதாகும் இரண்டு மதிப்புகளுக்கு இடையே காணப்படும் வித்தியாசத்தையே வரையறுத்த தொகையென விவரணஞ் செய்கின்றோம்.

xஐப் பொறுத்து $\phi(x)$-ன் தொகை $f(x) + C$ ஆனால், a b என்பன x-ன் சிறப்பு மதிப்புகளாகியவழி, $\int_a^b \phi(x)\,dx$ என்னுங் குறியீட்டை உபயோகிக்கிறோம். இதனைத் "தொகை $\phi(x)\,dx$-ன் a-லிருந்து b-க்கு" எனப்படிக்கிறோம்.

$$\int_a^b \phi(x)\,dx \equiv [f(x)+C]_a^b \equiv [f(b) + C] - [f(a) + C]$$

$$\equiv f(b) - f(a) \text{ ஆகும்,}$$

உதாரணமாக, $f(x) = 2x$ ஆனாலும், $a = 2$, $b = 5$ ஆனாலும்,

$$\int_2^5 2x\,dx = [x^2 + C]_2^5 = [5^2 + C] - [2^2 + C] = 21$$

$\int_a^b \phi(x)\,dx$ என்பது வரையறைப்படு தொகையெனப்படும்.

a-லிருந்து b என்பது தொகை காணற்குரிய வரம்பு அளவுகளின் இடைவெளியாகும். a, b என்பன தொகையின் எல்லையளவுகளாகும்.

இவற்றுள் a கீழெல்லையும், b மேலெல்லையுமாகும். இங்கு எல்லைகள் என்பன x-ன் முடிவுநிலை மதிப்புகளென்றே பொருள்படும்.

5.2. வரையறுத்த தொகையின் தன்மைகள்

(1) வரையறுத்த தொகையானது தொகையின் மாறிலியோடு சார்புறுததாகும்.

மூலச் சார்பலனுடைய இரண்டு குறிப்பிட்ட மதிப்புகளின் வித்தியாசமானது தொகையின் மாறிலியோடு சார்புறுதிருக்குந் தன்மையை மேலே கண்டோம். ஆகையால், நாம் அத்தகைய தொரு வித்தியாசத்தைக் கண்டறிய முயலுந்தொறும் மாறிலியைப் புறக்கணித்துவிடலாம். எனவே $\int_a^b \phi\, x\, dx$ஐ மதிப்பிடுதற்கண் பின்வருமாறு செய்யலாம்:

xஐப் பொறுத்து $\phi(x)$-ன் தொகையை மதிப்பிடுக. தொகையின் மாறிலியைப் புறக்கணித்துவிட்டு அம்மதிப்பை $f(x)$ என்று கருதுக. $x = b$ ஆகும்பொழுது, $f(x)$-க்குக் கிடைக்கும் மதிப்பிலிருந்து $x = a$ ஆகும்பொழுது அதற்குண்டாகும் மதிப்பைக் கழித்துவிடுக. உதாரணமாக,

$$\int_2^5 2x\, dx = \left[x^2 \right]_2^5 = 5^2 - 2^2 = 21$$ முன்போலவே.

(2) ஒரு வரையறுத்த தொகையானது அதன் வரம்பு மதிப்புகளின் சார்பலனாகும்.

$\int (x) \phi\, dx$ என்பது x என்னும் மாறியின் சார்பலனாகும் பொழுது, $\int_a^b \phi\,(x)\, dx$ ஆனது தொகையின் வரம்பு மதிப்புகளை யொட்டியதொரு மாறிலியாகும். இது சார்பலனின் வடிவத்தையே அனுசரித்துள்ளதல்லாமல், தொகையின் மாறிலியொடு சார்புபடாமையும் நோக்கப்படும். ஏனெனில்,

$$\int_a^b \phi\,(x)\, dx = \int_a^b \phi\,(y)\, dy,$$ என்னுமிவற்றுள் ஒவ்வொன்றும் $f(b) - f(a)$-க்குச் சமனுதலின் என்க.

குறிப்பு : ஒரு வரையறுக்கப்படாத தொகையை, ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையான மதிப்பு a-விருந்து ஒரு மாறுபடும் மதிப்பு x-க்கு மதிப்பறியப்பட்டதொரு வரையறுக்கப்பட்ட தொகையாகு

மெனவே கருதலாம். அதாவது, இதுவரையில் $f(x) + C$ என்னும் வடிவில் எழுதப்பட்ட வரையறைப்படாத தொகையானது,

$\int_a^x \phi(x)\, dx\, dx$, அதாவது $[f(x)]_a^x$ அல்லது $f(x) - f(a)$ எனக் கருதப்படலாம். இங்கு மாறிலி C-க்குப் பதிலாக $-f(a)$ என்னும் மாறிலியைப் பெறுகின்ரேம்.

ஆகவேதான், இக்காரணம் பற்றியே மேல் வரம்பானது ஒரு மாறிலியாக அன்றி யொரு மாறியாக நிற்க $\int_a^x \phi(x)\, dx$ என வடிவுறுவது ஒரு வரையறுக்கப்படாத தொகையெனக் கூறப்படுகின்றது.

வரையறைப்படு தொகைக்குக் கூறிய விவரணத்திலிருந்து பின் வரும் தன்மைகள் பிறப்பனவாகும் :

(3) $\int_a^b \phi(x)\, dx = -\int_b^a \phi(x)\, dx$. அதாவது வரம்பு மதிப்புகளை நிலைமாற்றுவதாகுமிடத்துத் தொகையின் இராசிக்குறியை மாற்றுகிரேம்.

$$(4)\quad \int_a^b \theta(x)\, dx = \int_a^c \phi(x)\, dx + \int_c^b \phi(x)\, dx,\ a < c < b$$

ஆகுங்கால்.

அதாவது, ஒரு வரையறுக்கப்பட்ட தொகையானது எத்தனை தொகைகளின் கூட்டுப்பலனுக வேண்டுமானுலும் பிரித்தெழுதிக் கொள்ளப்படலாம்.

(5) $\int_a^b K\phi(x)\, dx = K\int_a^b \phi(x)\, dx$, K ஒரு மாறிலியாகும்.

$$(6)\quad \int_a^b \{f(x) + \phi(x)\}\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b \phi(x) dx$$

(7) ஒரு வரையறுக்கப்பட்ட தொகையில் சார்பற்ற மாறியை மாற்றுவதால், அத் தொகையின் வரம்புகளிலும் அதற்கு ஒத்த ஒரு மாற்றம் விளையும்.

விளக்க உதாரணங்கள்

$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ஐ மதிப்பிடுக.

நாம் ஏற்கெனவே வரையறுக்கப்படாத தொகையை

$$a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2}$$

என மதிப்பீடு செய்தோம். அதையொட்டி வரையறைப்படு தொகையாய வழி மதிப்பறியுங்கால்,

$$\left[a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} \right]_0^a$$

$$= \left[\frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{a}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - a^2} \right] = \left[\frac{a^2}{2} \sin^{-1} 0 + 0 \right]$$

$$= \frac{a^2}{2} \sin^{-1} 1 = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{4}$$ ஆகும்.

குறிப்பு : $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ ஐ மதிப்பிடுகையில் நாம் பின் வருமாறு செய்முறையை மேற்கொண்டோம் :

$x = a \sin\theta$ என்று பிரதியிட்டு, $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2}$ $(\theta + \sin\theta \cos\theta)$ எனக் கண்டறிந்தோம். பிறகு தொடக்கத்தில் கொடுத்த மதிப்புக்கு மீளச்சென்று x-க்கான வரம்புகளை மதிப்பீடு செய்தோம். இதற்குப் பதிலாகப் பின்வருமாறு எளியதொரு செய்முறையையும் மேற்கொள்ளலாம் :

மாறியை x-லிருந்து θ-க்கு மாற்றுமலே θ-வைக் கண்டறிந்து, அதற்கான வரம்புகளை x-க்குக் கொடுத்த வரம்புகளுக்கு ஏற்றபடி பயன்படுத்தலாம். எவ்வாறெனில்,

$x = a$ ஆகும்பொழுது, $a \sin\theta = a$,

$$\therefore \sin\theta = 1, \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{2}$$

$x = 0$ ஆகும்பொழுது, $a \sin \theta = 0$,

$\therefore \sin \theta = 0, \quad \therefore \theta = 0$

$$\therefore \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left[\frac{a^2}{2} (\theta + \sin \theta \cos \theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

ஆகவே, மாறியை மாற்றும்பொழுதே வரம்புகளையும் மாற்றி யமைக்கவேண்டும்.

பயிற்சி 5.1

மதிப்பிடுக :

1. $\int_{-1}^{1} (3x^2 - 4)\, dx$ 2. $\int_{-1}^{3} (2x^2 - 3x + 1)\, dx$

3. $\int_9^{16} \frac{x - 1}{\sqrt{x}}\, dx$ 4. $\int_0^a \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

5. $\int_{-1}^{2} \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{4}} \right) dx$ 6. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos 2x + \sin \frac{x}{3} \right) dx$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta$ 9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\, dx$.

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\, dx$ 11. $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} 2 \sin 3x \cos x\, dx$

12. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x\, dx$; $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \sin x \cos 3x\, dx$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$ 14. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^3 x\, dx$

15. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin 3x + \cos 4x)\, dx$ 16. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos x\, dx$

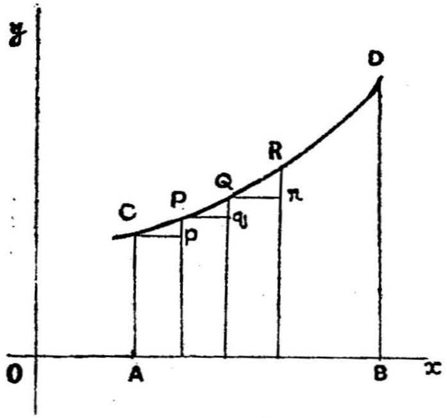
17. மதிப்பிடுக: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\, (2x - 3)^2 + \sin 2x \,]\, dx$

5.3. தொகை நுண்கணிதத்தின் அடிப்படைத் தேற்றம்

ஒரு வரையறைப்படு தொகையை இருவகையாக விவரணம் செய்தல் :

படத்திலுள்ள வளைவரையானது சார்பலன் $f(x)$-ன் வரைபடமாகட்டும். $OA = a$, $OB = b$ என்று x-க்குக் கொடுக்கப்பட்ட இரு மதிப்புகளுக்கு ஏற்ப AC, BD என்பன $f(x)$-ன் இரு மதிப்புகளாகட்டும். அப்பொழுது $AC = f(a)$; $BD = f(b)$ ஆகும். இந்நிலையில், AC ஆனது அளவு குறித்தறியப்படாத pP, Qq, rR என்பன போன்ற மிகச் சிறிய பெருக்கங்களால் BD-க்குப் பெருகியதாகக் கருதப்படும். அப்பொழுது x ஆனது ஒவ்வொரு தடவையும் δx அளவு மிகுதியுற்றதாகும். ஒவ்வொரு சிறு பெருக்கமும் தோராயமாக $f'(x)\, dx$ ஆகும்.

இப்பொழுது a-விருந்து b வரையிலுள்ள மதிப்புகளை அடுத்தடுத்து x-க்குக் கொடுத்து, $f''(x)\,dx$-ன் பலன்களாகிய



படம் 9.

மதிப்புகளையெல்லாம் சேர்த்துக் கூட்டுவதால் $BD - AC$ அல்லது $f(b) - f(a)$ என்னும் மொத்தப் பெருக்கங்களையும் பெறுகிறோம்.

அதாவது $$\sum_{x=a}^{x=b} f'(x)\,\delta x = f(b) - f(a) \text{ தோராயமாக.}$$

P, Q, R ... என்பனவாகிய புள்ளிகள் எவ்வளவுக்கெவ்வளவு எண்ணிக்கையால் பெருகியுள்ளனவோ, அவ்வளவுக்கவ்வளவு தோராய மதிப்பும் சரிக்கட்டிவரும்.

ஆகவே, இடது பக்கத்திலுள்ளதன் மதிப்பைக் கண்டறிய முதலில் $f'(x)\,\delta x$-ன் வரையறுக்கப்படாத தொகையென்று கூறப்படுவதனை அதாவது $f(x)$ ஐக் காணவேண்டும். பிறகு x பெறும் b, a என்னும் வரம்பு மதிப்புகளுக்கு ஒப்ப $f(x)$ பெறும் $f(b)$, $f(a)$ என்பவற்றின் வித்தியாசத்தைக் கண்டறியவேண்டும். இச் செய்முறைக்குரிய குறிப்பாவது $\int_a^b f'(x)\,dx$ ஆகும். இது பகுதி 5.1-ல் முன்னமே விளக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \quad \underset{\delta x \to 0}{\mathrm{lt}} \sum_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx = f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx \ldots (1)$$

பேரளவுக்குப் பயன்படும் நிலைமை நோக்கிப் பலன் (1) ஆனது பொதுவாகத் தொகை நுண்கணிதத்தின் அடிப்படையான தேற்றமாகக் கொள்ளப்படுகின்றது.

பின்வருவது இத் தேற்றத்தின் நிருபணம் வேண்டாத பகுப்பாராய்ச்சி சார்ந்த கூற்று (analytic statement) ஆகும். இதன் சரியான நிருபணம் பெருகிய நுண்கணித நூல்களில் கண்டறியப்படும்.

தேற்றம் : $f(x)$-ம் அதன் வகைகெழுவாகிய $f'(x)$-ம் $a \leqslant x \leqslant b$ என்னும் இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுறு சார்பலனாகட்டும். இவ் விடைவெளியை $\delta x, > 0$ ஆக வைத்து δx_1, δx_2, δx_3 ... δx_n எனச் சிறு இடைவெளிகளாகப்பிரி. δx_1 என்னுஞ் சிறு இடைவெளிக்கு ஏற்புடைத்தாக x_1 என்பது மாறியின் யாதேனுமொரு மதிப்பாகட்டும். அப்பொழுது பெருக்கல்களின் கூட்டுப்பலனது எல்லை

$$\sum_{i=1}^{i=n} f'(x_1)\,\delta x_1 \text{ அல்லது } \sum_{i=1}^{i=n} \phi(x_1)\,\delta x_1 \text{ ஆகும்.}$$

(x ஆனது அளவின்றி பெருகுங்காலத்தில் ஒவ்வொரு δx_1-ம் குறைவுறுவதாகிப் பூச்சியத்தைக் குறுகும்.)

$$= f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx \text{ அல்லது } \int_a^b \phi(x)\,dx \text{ என்னும்}$$

வரையறுத்த தொகையின் மதிப்புக் குறியீட்டில்,

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \delta x_1 \to 0}} \sum_{i=1}^{i=n} f'(x_1)\,\delta x_1 = f(b) - f(a)$$

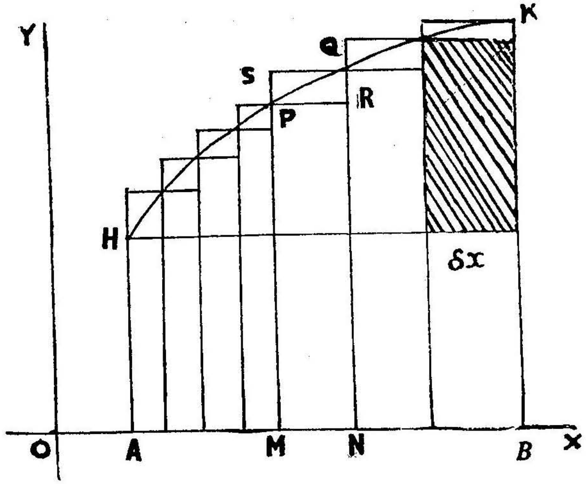
$$= \int_a^b f'(x)\,\delta x. \qquad \dots \qquad \dots \qquad (2)$$

குறிப்பு : $\int_a^b f'(x)\,dx$ என்னும் கோவையானது அளவிறந்த எண்ணிக்கையான வரையறைப்படாத சிறிய உறுப்புகளின் கூட்டுப்பலனது எல்லைக்குப் பிரதியாக நிற்பதாகும். இக்கூட்டுப் பலனைப் பெறவும், தோற்றத்தில் கூட்டலுக்குத் (summation) தொடர்பில்லாததுமாகிய பட்டறி முறையானது வகையீட்டுக் குணகத்திற்கு எதிர் நிலையானதாகும்.

ஆகவே, தொகையானது இரண்டு வகையாக விவரணம் செய்யப்படும். வகையீட்டுக் குணகத்திற்கு எதிர்நிலையானது அல்லது குறிப்பிட்ட தொடர்களின் கூட்டுப் பலனின் எல்லையாகும். வரலாற்று முறையாக $\int$ என்னும் தொகைக் குறியானது கூட்டுப் பலனைக் குறிக்கும் *SUM* என்னும் ஆங்கிலச் சொல்லின் முதலெழுத்தாகிய *S* என்னும் எழுத்திலிருந்து பிறந்த திரிந்த வடிவாகும். மேலே குறிப்பிட்ட கூட்டலானது இந்த எதிர்நிலை செய்முறையை அடியொட்டிருப்பதாகக் காட்டப்பட்டிருத்தலால், தொகையானது வகையீட்டுக் குணகத்திற்கு எதிர்நிலைச் செய்முறையாவதாக ஆரம்பப் பயிற்சியாளர்க்கு உணர்த்தப்பட்டுள்ளது.

5.4. அடிப்படையான தேற்றத்திற்கு வடிவ கணித வகையில் விளக்கம் (Geometric illustration of the fundamental theorem)

$x = a$-லிருந்து $x = b$ வரையில் $y = f'(x) = \phi(x)$ என்னும் தொடர்ச்சியுறு வளை வரையின் வரைபடம் *HK* எனக் கருதுவோம். $OA = a$-ம், $OB = b$-ம் ஆகட்டும். *AB*-யை $n\,\delta x = b - a$ ஆகு



படம் 10.

மாறு ஒவ்வொன்றும் δx நீளமுள்ள n பகுதிளாகப் பிரி. ஒவ்வொரு பிரிவிடத்தும் நிலைத்தூரங்களை வரைந்து அவை வளை வரையை *P*, *Q* முதலாகிய புள்ளியிடங்களில் சந்திப்பதாகக் குறி.

இங்ஙனம் குறிப்பிட்ட எல்லாப் புள்ளிகளிடத்தும் OX-க்கு ஒரு போகான கோடுகளை வரைக.

இப்பொழுது வளைவரைக்கு உட்பட்ட பரப்புக்கு உட்புறத்துள்ள செவ்வகங்களின் கூட்டுப் பரப்பானது சிறிது குறைவாகவும், வெளிப்புறத்துள்ள செவ்வகங்களின் கூட்டுப் பரப்பானது சிறிது அதிகமாகவுமிருத்தல் கண்கூடாகும்.

செவ்வகங்களின் எண்ணிக்கையை அளவிறந்து பெருக்கவும், அதே காலத்தில் ஒவ்வொரு செவ்வகத்தின் அகலத்தை அளவின்றிக் குறைவுறவும் செய்வதனுல், தோராய மதிப்பானது உண்மை மதிப்புக்கு மிகமிகச் சமீபமடையும்.

(i) வளைவின் கீழ் δx அகலமுள்ள செவ்வகங்களின் பரப்புகளின் கூட்டுப்பலனாகிய

$\phi(a)\,\delta x + \phi(a+\delta x)\,\delta x + \phi(a+2\delta x)\,\delta x \;\ldots\;\ldots\;\ldots$ $\phi(b-\delta x)\,\delta x$ என்பது வளைவின் கீழுள்ள பரப்புக்குச் சிறிது குறைந்த பரிமாணமாகும்.

(ii) வளைவுக்கு மேலுள்ள செவ்வகங்களின் கூட்டுப் பலனாகிய

$\phi(a+\delta x)\,\delta x + \phi(a+2\delta x)\,\delta x + \ldots\;\ldots\;\phi(b)\,\delta x$ என்பது வளைவின் கீழுள்ள பரப்புக்குச் சிறிது மிகுந்த பரிமாணமாகும்.

வெளியேயுள்ள செவ்வகத் தொகுதியின் கூட்டுப் பரப்புக்கும், உள்ளேயுள்ள செவ்வகத் தொகுதிகளின் கூட்டுப் பரப்புக்கும் உள்ள வித்தியாசம்

$= PRQS$ போன்ற சிறிய செவ்வகங்களின் கூட்டுப்பலனுதல் வெளிப்படையாகும்.

$= \delta x \times$ செவ்வகங்களுக்குரிய உயரங்களின் கூட்டுப் பலனுகும்.

$= \delta x \times (BK - AH)$, படத்தில் கோடிட்ட பகுதியின் பரப்பாகும்.

$(BK - AH)$ ஆனது முடிவுள்ளதாகும்.

$n \to \infty$ ஆகும்பொழுது, $\delta x\ (BK - AH)$ ஆனது பூச்சியத்தை நெருங்கும். இதன் பயனுக $\delta x \to 0$ ஆகும்.

ஆகவே, உட்புறத்தும் வெளிப்புறத்துமுள்ள செவ்வகங்களின் தனித்தனிக் கூட்டுப் பலன்கள் எல்லைகளை நோக்குறுங்கால், அவற்றின் பரப்புகளின் வித்தியாசம் பூச்சியமாதலின், அவைகள் ஒத்தனவாகிய ஒரே எல்லை மதிப்பைப் பெறும். $AHKB$ என்ற வளைவரைக்குக் கீழடங்கிய பரப்பானது இவ்விருவகையான செவ்வகத் தொகுதிகளின் பரப்புக்கு இடைப்பட்டிருத்தலால், $\delta x \to 0$ ஆகுமிடத்து, ஒவ்வொரு செவ்வகத் தொகுதியின் பரப்பும் $AHKB$ ஆகும்.

$$\therefore \text{ பரப்பு } ABKH = \underset{\delta x \to 0}{\text{எல்லை}} [\phi(a)\delta x + \phi(a+\delta x)x + \dots \dots \phi(b-\delta x)\delta x]$$

அல்லது,

$$\underset{\delta x \to 0}{\text{எல்லை}} [\phi(a+\delta x)\delta x + \phi(a+2\delta x)dx + \dots\dots\phi(b)\delta x \text{ ஆகும்.}$$

$$= \underset{\substack{x \to \infty \\ \delta \to 0}}{\text{எல்லை}} \sum_{i=1}^{i=n} \phi(x_1)\delta x_1 = f(b) - f(a)$$

$$= \int_a^b \phi(x)\delta x$$

இவ்வாறாக. $y = \phi(x)$ வளைவரைக்கும், $x = a$-ம், $x = b$-ம் ஆகிய நிலத் தூரங்களுக்கும் அகப்பட்டு நிற்கும் $ABKH$ என்னும் பரப்பானது,

$\int_a^b \phi(x)dx$ என்னும் வரையறுக்கப்பட்ட தொகையால் குறிக்கப்படும்.

குறிப்பு 1 : மேற்கூறிய விளக்க வகையானது AB என்பது சமனாகாத n பிரிவுகளாகச் செய்யப்படினும் பொருந்துவதாகும்.

குறிப்பு 2 : இவ்விளக்கத்தில் HK என்னும் வில்லின் வழியாக x ஆனது a-லிருந்து b வரையில் பெருகுந்தோறும் y ஆனது தொடர்ச்சியாகப் பெருகிக் கொண்டே வருவதாகக் கருதிக் கொண்டோம். x பெருகுந்தோறும், y குறைவதாயின், வளைவரைக்குக் கீழுள்ள செவ்வகங்கள் (2)-ல் கூறப்பட்டனவாகவும், மேலுள்ள செவ்வகங்கள் (1)-ல் கூறப்பட்டனவாகவும் மாறிக் கருதிக் கொள்ளுவது தவிர மற்ற நிலைமைகளெல்லாம் மேற் கூறிய படியே ஒத்து நிகழ்வனவாகும். இறுதியாக, HK என்னும் வில்லானது முடிந்த எண்ணிக்கையுடைய மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளைப் பெற்றுள்ளதாயின், மேற்கூறிய காரணங்களை யொட்டி x

பெருகுங்கால், y ஆனது படிப்படியாகப் பெருதகுலும் குறைதலு மாகும் நிலைமை ஏற்பட நிற்கும் ஒவ்வொரு வில்லின் பகுதிக்கும் அமைத்துக் கொளல் வேண்டும்.

குறிப்பு 3 : மேற்கூறிய செய்முறையானது முற்றிலும் பொது வானதாகும். இதனை அளக்கக்கூடிய பரிமாணம் வாய்க்கப் பெறும் கொள்ளளவுகள், வளைவரைகளின் விற்களின் நீளங்கள் ஆகிய யாதனுக்கேனும் பயன்படுத்தலாம். ஒன்று கொடுக்கப்பட்ட பரிமாணமானது மிகப் பெரிய எண்ணிக்கையுடைய (n என்க) சிறிய மூலகங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டிருந்தால், ஒரு மாதிரி மூலகத்தை எடுத்துக் கொண்டு, அதன் அளவு δm ஐ, அறியப்பட்டதொரு x-ன் சார்பலனையும் δx-ஐயும் ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனுகக் கூறப்படும். இங்குக் குறிப்பிட்ட x-ன் சார்பலனின் வடிவமானது கொண்ட பரிமாணத்தின் தன்மைக்கு ஏற்ப அடியொட்டி நிற்கும். கொடுத்த பரிமாணமானது a-க்கும் b-க்கும் இடையே கிடந்தால் அதன் அளவானது, $n \to \infty$ ஆதலும், அதன் பயனுக $\delta x \to 0$ ஆதலும் ஆகிய நிலைமைக்கண் அளவிறந்த சிறிய மூலகங்களின் கூட்டுப் பலனது வரம்பாகும்.

$$\therefore \quad M = \Sigma \delta M$$

$$= \lim_{\substack{n \to \infty \\ \delta x \to 0}} \sum_{x=a}^{x=b} [\text{அறிந்த } x\text{-ன் சார்பலன்}]\, \delta x$$

$$= \int_a^b (\text{அறிந்த } x\text{-ன் சார்பலன்})\, \delta x.$$

குறிப்பு 4 :

$$\lim_{\delta x \to 0} [\phi(a)\,\delta x + \phi(a+\delta x)\,\delta x + \dots + \phi(b-\delta x)\, dx]$$

$$= \int_a^b \phi(x) \,.\, dx$$

என்னும் பலனில் $\delta x = h$ என்று பிரதியிட்டால்

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ h \to 0}} h[\phi(a) + \phi(a+h) + \dots \phi(a+\overline{n-1}\,h)]$$

$$= \int_a^b \phi(x)\, dx$$

எனக் கிடைக்கப் பெறுகின்றோம். இவ்வடிவமானது ஒரு கூட்டுப் பலனை வரையறைப்படும் தொகையாகக் கூறி வரம்பு காண்பதற்குப் பயன்படுவதாகும். எதிரதாக, ஒரு வரையறைப்படும் தொகையின் மதிப்பை ஒரு கூட்டுப் பலனின் வரம்பாகக் கூறுவதற்கும் பயன் படுவதாகுமென்றறிகின்றோம். இந்த எதிர்நிலைத் தத்துவத்தைப் பயன்படுத்தி ஒரு வரையறைப்பட்ட தொகுதியின் மதிப்பைக் கண்டறிதல் சாதாரண சார்பலன்களைப் பற்றியேயாயினும், சிக்கலுக்குள்ளாக்கும். பெரும்பாலான வகைகளில் அசாத்தியப்படுதலுமாகும். ஆகவே வரையறுக்கப்படாத தொகையானது கடினமாக விளங்கும் வகைகளில் மட்டுந்தான் அது கையாளப்படும்.

குறிப்பு 5: $f'(x) \equiv \phi(x)$ ஆனது $f(x)$-ன் வகைகெழுவானால், அப்பொழுது $\int_a^b f'(x)\,dx \equiv \int_a^b \phi(x)\,dx$ ஆகி, $y=f'(x)$ அல்லது $\phi(x)$ என்ற வளைவரைக்குக் கீழ் x அச்சுக்கும் $x=a$-ம், b-ம் ஆகிய இடங்களில் நிற்கும் நிலைத்தூரங்களுக்கும் இடையே அகப்பட்டுக் காணப்படும் பரப்பைக் குறிப்பிடுவதாகும். இந்நிலையில் $y=f(x)$ என்னும் வளைவரையைப் பொறுத்தமட்டில் அதே தொகையானது $x=a$, $x=b$ என்னும் இடைவெளியில் $f(x)$-ன் நிலைத்தூரத்தில் உண்டாகும் பெருக்கத்தையே குறிப்பிடுவதாகும் (பகுதி 5.3ஐயும், 5.4 ஐயும் காண்க.)

5.5. வரையறுத்த தொகையானது எதிர்நிலை வகையீட்டுக் குணகத்துடன் கொண்டுள்ள தொடர்பினைக் கூட்டுப்பலன் முறையாலன்றிப் பரப்பளவைக் காணும் முறையால் அறிதற்கு உரிய செய்வகையானது புகட்டுணர்வுடையதாய்ப் பின்வருமாறு கையாளப்படும்:

$y=\phi(x)$ என்னும் வளைவரைக்கும் x அச்சுக்கும், $x=a$-ம், $x=b$-ம் ஆகிய இடங்கள் நிற்கும் நிலைத்தூரங்களும் இடைப்பட்டுக் காணப்படும் பரப்பினை $\int_a^b \phi(x)\,dx$ எனக் கொடுக்கப்பட்ட வரையறைபடு தொகையால் காட்டலாம்.

படம் 10-ல் $a \angle b$ ஆகுமிடத்து $x=a$-ம், $x=b$-ம் ஆகிய இடங்களில் நிற்கும் AH, BK என்னும் நிலைத்தூரங்களுக்கும், $y=\phi(x)$ என்னும் வளைவரைக்கும் இடையிலுள்ள பாகம் HK ஆகும். நாம் $ABKH$ என்னும் பரப்பினை மதிப்பிட விரும்புகின்றோம். x அச்சுத் தூரமுடைய M என்னும் இடம் மாறும்

புள்ளியிடத்தில் y அளவு மாறுபடு நிலைத் தூரமானது MP ஆகட்டும்,

ஆகவே, P-ன் ஆயத்தொலைவுகள் (x, y) ஆகும்.

$AMPH$ என்னும் பரப்பானது MP-ன் இட நிலையைப் பொறுத்து வேறுபடுவதாகும். இப் பரப்பானது AH-ன் இட நிலையிலிருந்து தொடங்கி வலது பக்கமாக இடம்பெயர்ந்து இயங்கி, மாறுபடும் அளவுடைய MP என்னும் நிலைத்தூரத்தால் உற்பத்தியாவதாகக் கருதுவோம். இவ்வண்ணம் வேறுபடும் $AMPH$ என்னும் பரப்பை Z எனக் குறிப்பிடுவோம். இதுபற்றி x அச்சின் வழியே M ஆனது இடம் மாறுபடுவதற்கு ஏற்ப இவ் Z என்னும் பரப்பும் மாறுபாடுறுதல் தெளிவாகும். ஆகவே, Z ஆனது xஐப் பொறுத்ததொரு சார்பலனாகும். மேலும், $x = a$ ஆகும்பொழுது $Z = 0$ ஆகும். இதனுடன் பெறவேண்டிய $ABKH$ என்னும் பரப்பானது $x = b$ ஆகும்பொழுது, Z-னுடைய மதிப்பினதாகும்.

இப்பொழுது x மாறுபடுங்கால், Z மாறுபடும் விதத்தினை ஆராயப் புகுகின்றோம். தொகை நுண்கணித மொழிமுறையைப் பயன்படுத்திக்கொண்டு $\frac{dZ}{dx}$ ஐக் காண முயலுவோம்.

x ஆனது $x + \delta x$ ஆகப் பெருகட்டும். அப் புதிய இடத்தில் நிற்கும் நிலைத் தூரம் NQ ஆகட்டும். இதன் விளைவாகப் பரப்பளவில் ஏற்பட்ட மிகுதி $PMNQ$ என்னும் பரப்பாகட்டும். NQ-க்குச் செங்குத்தாக PR ஐயும், MP-க்குச் செங்குத்தாக QS ஐயும் வரைக. அப்பொழுது. δx ஆனது போதிய அளவுக்குச் சிறியதானால், δZ ஆனது $PMNR$, $SMNQ$ என்னுஞ் செவ்வகங்களுக்கு இடைப்பட்டிருத்தல் புலனாகும். அதாவது, $MP \cdot \delta x$-க்கும் $NQ \cdot \delta x$-க்கும் இடைப்பட்டிருக்கும்; அதாவது, P-க்கும், Q-க்கும் இடையில் சரிவானது மிகை இராசியல்லது குறை இராசியாயினும், $y\ dx$-க்கும் $(y + \delta y)\ dx$-க்கும் இடைப்பட்டு இருக்கும் என்பதாம்.

ஆகவே, $\frac{\delta Z}{\delta x}$ ஆனது MP-க்கும் NQ-க்கும் இடையில் உள்ளதாகும்; அதாவது y-க்கும் $y + \delta y$-க்கும் இடையிலுள்ளதாகும்.

$\delta x \to 0$ ஆகும்பொழுது $\delta y \to 0$-ம், $y + \delta y \to y$-ம் ஆகும்.

ஆகவே, y-க்கும், $(y + \delta y)$-க்கும் இடைப்பட்ட மதிப்பினை யுடைய $\frac{\delta Z}{\delta x}$-ம் yஐ நெருங்குவதாகும். ஆனால், $\frac{\delta Z}{\delta x}$-ன் எல்லை மதிப்பு $\frac{dZ}{dx}$ ஆகும்.

$$\text{ஆகவே,} \quad \frac{dZ}{dx} = y = \phi(x)$$

இவ்வாறாக, Z என்னும் மாறுபடு பரப்பானது xஐப் பொறுத்து $\phi(x)$ வகை கெழுவாகும்படியாக x-ன் சார்பலனாகும். அதன் மதிப்பு $x = a$ ஆகும்பொழுது பூச்சியமாகும்.

$$\therefore Z = \int \phi(x)\, dx \quad \text{அல்லது} \int y\, dx$$

நாம் $\phi(x)$ வகை கெழுவாகப் பெறற்குரியதாக யாதேனுமொரு சார்பலன் $f(x)$ஐக் கண்டு பிடித்தால், Z-னுடைய வடிவமானது $Z = f(x) + C$ (ஒரு மாறிலி) யாகும்.

இப்பொழுது $x = a$ ஆகுமிடத்து $Z = 0$ ஆகும்.

ஆகவே, $0 = f(a) + C$ ஆகும்.

அதுபற்றி $C = -f(a)$ ஆகும்.

$\therefore \quad Z = f(x) - f(a)$ ஆகும்.

Z-ன் இம் மதிப்பானது MP-ன் யாதொரு இடநிலைக்கேனும் $AMPH$-ன் பரப்பைத் தருவதாகும். $ABKH$ பரப்பானது, MP என்பது BKயோடு ஒன்றும்பொழுது, அதாவது $x = b$ ஆகும் பொழுது, Z-க்கு உண்டாகும் மதிப்புக்கு ஒப்பாகும். ஆகவே, $ABKH$-ன் பெறத்தகு பரப்பானது $f(b) - f(a)$ எனத் தரப்படும். இது $[f(x)]_a^b = \int_a^b \phi(x)\, dx$ என பகுதி 5-1-ல் கூறிய குறியீட்டால் எழுதப்படும்.

பரப்புகளை மதிப்பிடுவது பற்றியதொரு குறிப்பு

பரப்புகளை மதிப்பிடுகையில் கருதக்கிடக்குமொரு பரப்பினை யுள்ளடக்கி நிற்கும் வளைவரையின் சமன்பாட்டினைச் சுருங்கிய வடிவில் முதலிற் கண்டறிய வேண்டும். பிறகு அப் பரப்பினைக் கட்டுப்படுத்தி நிற்கும் முடிவு நிலைத்தூரங்களை எல்லைகளாகக் கொண்டு வரையறைபடு தொகைக்கு வடிவம் அமைத்துக்கொளல்

வேண்டும். எல்லா வகைகளிலும் படங்களை வரைந்து கொளல் வேண்டும்.

பரப்பின் இராசிக் குறி

HK என்னும் வில்லானது X அச்சுக்குக் கீழே இருந்தால் y ஆனது முடியக் குறை இராசியாகும். δx ஆனது மிகை இராசியாகக் கொளப்படின், பெறப்படு பரப்பு குறை இராசியுடையதாகும். HK என்னும் வில்லானது X அச்சை A-க்கும், B-க்கும் இடையில் வெட்டுமானல், X அச்சுக்கு மேலுள்ள பரப்பு மிகை இராசியாகும். கீழுள்ள பரப்பு குறை இராசியாகும். $\int_a^b f(x)dx$ ஆனது இவ்விருவகை பரப்புகளின் இயற்கணித கூட்டுப் பலனைக் கொடுக்கும். அதாவது இவ்விரு பரப்பளவுகளின் எண்மான வித்தியாசத்தைக் கொடுக்கும். எண்ணளவில் பரப்பைப் பெறுதற்கு அவ்விரு பகுதிகளுக்குமுரிய பரப்புகளைத் தனித்தனியாகக் கணக்கிட்டு அவ்விரு பலன்களையும் கூட்டிக் கொள்ளுதல் அவசியமாகும்.

இரண்டு வளைவரைகளுக்கு இடையிலுள்ள பரப்பு

$y = f(x)$; $y = \phi(x)$ ஆகிய வளைவரைகளுக்கு இடையே $x=a$, $x=b$ என்னுமிடத்துள்ள நிலைத்தூரங்களுக்கு உட்பட்டுள்ள பரப்பு $= \int_a^b [f(x)-\phi(x)]\, dx$ ஆகும். இங்கு $f(x)$ என்னும் வளைவரையானது $\phi(x)$ என்னும் வளைவரைக்கு மேலுள்ளதாகியும், $x = a$; $x = b$ என்னும் இடைவெளியில் அவை ஒன்றையொன்று ஊடறுத்துக் கொள்ளாமலும் இருந்தால்தான் இது பொருந்தும். இவ்விரண்டு வளைவரைகளையும் இரண்டு புள்ளிகளுக்கு மேற்பட்ட இடங்களில் ஊடறுத்துக்கொண்டு நிற்குமானல், மேற்கூறிய பலன்களில் காட்டிய எல்லைகள் அடுத்தடுத்துள்ள எவையேனும் இரண்டு புள்ளியிடங்களையே சுட்டி நிற்பனவாகும்.

y அச்சுக்கும் வளைவரைக்கும் இடைப்படு பரப்பு

மேற்கூறியதற்கு ஒத்த விளக்கத்தால், H, K என்னும் வில்லுக்கும், y அச்சுக்கும், H, K என்னுமிடங்களிலிருந்து y அச்சின் மேல் வீழ்த்தும் செங்குத்துக் கோடுகளுக்கும் இடையே அக்கப்பட நிற்கும் பரப்பு $\int_c^d x\, dy$ என்றதனல் தரப்படும். இங்கு c, d என்பன H, K என்னும் புள்ளிகளின் நிலைத்தூரங்களாகும்.

5.6. வரையறைபடும் தொகைக்கு இயற்பியல் முறையில் விளக்கம் (Physical interpretation of the definite integral)

$\phi(x)$ ஆனது xஐப் பொறுத்து S-ன் மாறுபடு வீதத்தை அளக்குமானால், அதாவது $\phi(x) = \frac{dS}{dx}$ ஆனால், அப்பொழுது, $y = \phi(x)$ என்னும் வளைவரையின் இடம் பெயரும் நிலைத்தூரம் ஒன்று $x = a$-லிருந்து $x = b$-க்குப் பரப்பிக் காட்டிய S என்னும் பரப்பை $\int_a^b \phi(x)\,dx$ என்பது குறிப்பிடுமென முன்னமேயே காட்டினோம். இப் பலனானது ஒரு மாறுபடு பரிமாணமானது ஒரு பரப்பாக இல்லாத விடத்தும் ஏற்புடைத்தாகும். ஆகவே, பொதுவாக, y என்பது x-ன் சார்பலனாகவும், xஐப் பொறுத்து y-ன் மாறுபடு வீதம் $\phi(x)$ ஆகவும் இருந்தால், x-ஆனது a-லிருந்து b-க்கு மாறுபடுகையில் y-ல் விளைந்த மொத்த மாறுபாடு $\int_a^b \phi(x)\,dx$ ஆகும். உதாரணமாக, காலத்தைப் பொறுத்து தூரத்தின் மாறுபடு வீதம் கொடுக்கப்பட்டால் அதாவது, ஒரு நேர்க்கோட்டில் இயங்கும் துகளின் t நேரத்தில் காணலுறும் வேகத்தைக் கொடுத்தால், அப்பொருளானது குறிப்பிட்ட ஒரு கால இடைவெளியில் சென்ற தூரத்தை மதிப்பிடக் கூடும்.

$$\text{ஆகவே, } s = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt.$$

அப்பொருள் கடந்த தூரமானது கால-நேர வளைவரையின் கீழ் t_1, t_2 என்னும் நிலைத் தூரங்களுக்கு இடையில் அளவுபடும் பரப்புக்கு எண்ணளவில் ஒப்பதாகும்.

விளக்க உதாரணங்கள்

முதலாவது விளக்க உதாரணம் : r அலகு ஆரமுள்ள வட்டத்தின் பரப்பைக் கண்டறிதல் :

மையத்தின் வழியாகச் செல்லும் செங்குத்தாயங்களைச் சுட்டியொரு வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = r^2$ ஆகும். இதனால், $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ எனப் பெறப்படும். மிகை இராசிக் காற்பகுதியில் உள்ளதொரு புள்ளிக்கு $y = +\sqrt{r^2 - r^2}$ என எடுத்துக்கொள்ளுகிறோம். சமச்சீர்நிலையால், காற்பகுதியில் உள்ள பரப்புக்கு நாற்பங்கு முழுவட்டத்தின் பரப்பாகுமெனக் கொள்ளலாம்.

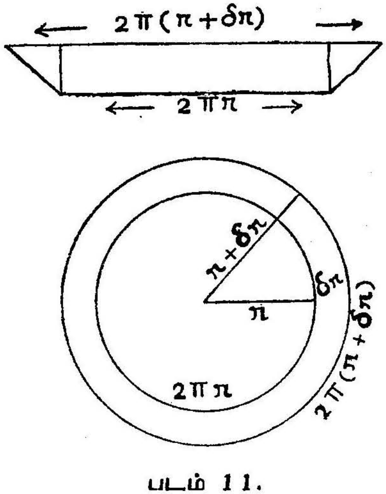
$$\therefore \quad \text{பரப்பு} = 4\int_0^r y\,dx = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

$$= 4\,\frac{\pi r^2}{4} = \pi r^2.$$

மறுவழி 1: ஆரம் r அலகுள்ள வட்டத்தின் $2\pi r$ எனக் கொண்டு, வட்டத்திற்குரிய சூத்திரத்தைக் கருதாமல், r-ம், $(r + \delta r)$-ம் ஆகிய இரண்டு ஆரங்களையுடைய ஏக மைய வட்டங்களிடையே அடங்கிக் கிடக்கும் பரப்பு $2\pi r\delta r$ என நிரூபிக்க ($\delta x > 0$-ம், சிறியதுமாகும்).

இதிலிருந்து r அலகு ஆரமுடைய வட்டத்தின் பரப்பு πr^2 என வருவிக்க.

ஆரம் r ஆகும் வட்டத்தின் மையம் O ஆகுக. δr அகலமுடைய தொரு தொடக்க வளையம் வட்டத்தைச் சுற்றியிருப்பதாகுக. r ஆரமுடைய வட்டத்தின் பரப்பு A எனக் குறிக்கப்படுமானல், A ஆனது r-ன் சார்பலனுகும். வளையத்தின் பரப்பை δA எனக்



படம் 11.

குறித்துக்கொளலாகும். பரப்பு δA ஆனது ஆரங்கள் r-ம், $(r+\delta r)$-ம் ஆக்கக்கொண்ட இரண்டு வட்டங்களின் இடையில் கிடக்கின்றதாகும். அதாவது, அகலம் δr-ம், தனித்தனி நீளங்கள் $2\pi r$-ம், $2\pi(r + \delta r)$-ம் கொண்ட இரண்டு செவ்வகங்களின் இடையே இருக்கும்.

ஆகவே, $2\pi r\delta r < \delta A < 2\pi (r + \delta r)\,\delta r$

அதாவது $2\pi r < \dfrac{\delta A}{\delta r} < 2\pi (r + \delta r)$

$\delta r \to 0$ ஆகும்பொழுது, $2\pi (r + \delta r) \to 2\pi r$ ஆகும்.

$\therefore$ அவ்விரண்டனுக்கும் இடைப்பட்டுள்ள $\dfrac{\delta A}{dr}$-ம் $\to 2\pi r$ ஆகும்.

ஆனால், $\delta r \to 0$ ஆகுமிடத்து $\dfrac{\delta A}{\delta r}$-ன் எல்லை மதிப்பு $\dfrac{dA}{dr}$ ஆகும்.

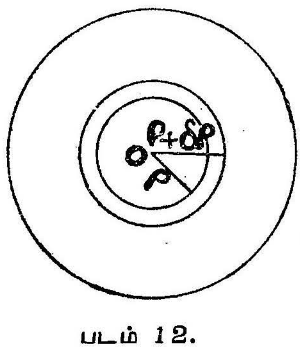
$$\therefore \quad \frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

$$\therefore \quad A = \int 2\pi r dr = \pi r^2 + C$$

$r = 0$ ஆகும்பொழுது $A = 0$ ஆகும். $\therefore$ $C = 0$ $\therefore$ $A = \pi r^2$.

மறு வழி 2 : வட்டத்தின் பரிதிக்குரிய சூத்திரத்தைக் கொண்டு வட்டத்தின் பரப்பை ஒரு கூட்டுப்பலனின் எல்லையாகக் கருதிக்கொண்டு காண்க.

ஆரம் r உடைய வட்டத்தின் மையம் O ஆகுக. கொடுத்த வட்டத்தோடு ஒரே மையங்கொண்ட பல சிறு வளையங்களாக



படம் 12.

வட்டத்தைப் பகுக்கவும். மையத்திலிருந்து ρ தூரத்தில் $\delta\rho$ அகலமுள்ளதொரு தொடக்க வளையத்தைக் கருதுக, இம்மூல வளையத்தின் பரப்பு δS ஆகுக. பரப்பு δS ஆனது ஆரங்கள் ρ-ம்,

$(\rho + \delta\rho)$-ம் உடைய இரு ஏகமைய வட்டங்களுக்கு இடைப் பட்டிருப்பதாகும்.

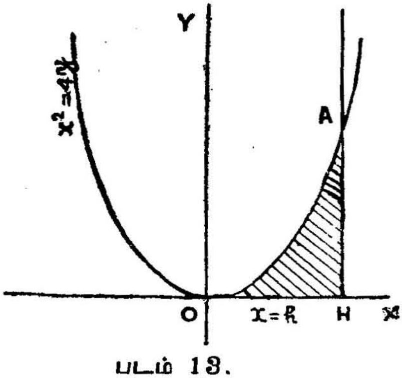
$\therefore$ δS ஆனது $2\pi\rho\delta x$-க்கும் $2\pi(\rho+\delta\rho)\delta\rho$-க்கும் இடையில் இருக்கும். $\delta\rho \to 0$ ஆகும்பொழுது, $\delta S = 2\pi\rho\,\delta\rho$ தோராயமாக. அகலம் $\delta\rho \to 0$ ஆக, எண்ணிறந்த சிறு வளையங்களது பரப்பு களின் கூட்டுப்பலனே முழு வட்டத்தின் பரப்பாகும் என்க.

$$\therefore\ A = \Sigma\,\delta s = \lim_{\delta\rho \to 0} \sum_{\rho=0}^{\rho=r} 2\pi\rho\delta\rho = \int_0^r 2\pi\rho\delta\rho$$

$$= \left[\pi\rho^2\right]_0^r = \pi r^2$$

இரண்டாவது விளக்க உதாரணம் :

வளைவரை $x^2 = 4y$, X அச்சு, $x = h$ இடத்து நிலைத்தூரம் ஆகியவற்றால் கட்டுப்பட்டுள்ள பரப்பை யறிக.



படம் 13.

பெற வேண்டிய பரப்பு AOH ஆனது படத்தில் நிழற்படுத்திக் காட்டப்பட்டுளது.

$$\text{பரப்பு } AOH = \int_0^h y\,dx = \int_0^h \frac{x^2}{4}\,dx$$

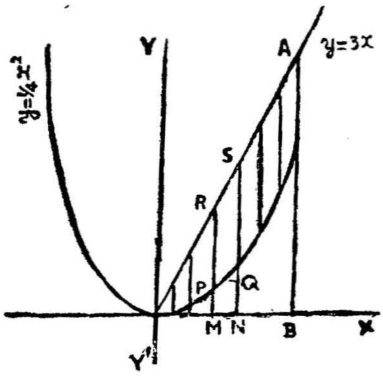
$$= \left(\frac{x^3}{12}\right)_0^h = \frac{h^3}{12} \text{ சதுர அலகுகள்.}$$

மூன்ருவது விளக்க உதாரணம் :

$y = 3x$ என்னுங் கோட்டால் வெட்டப்பட்ட $y = \frac{1}{4} x^2$ என்னும் வளைவரையின் பகுதியது பரப்பைக் காண்க.

பெற வேண்டிய பரப்பு $OPQASRO = y - 3x$ கோட்டுக்குக் கீழ் X அச்சுக்கு மேற்பட்டிருக்கும் பரப்பு $- y = \frac{1}{4} x^2$ வளை வரைக்குக்கீழ் X அச்சுக்கு மேற்பட்டிருக்கும் பரப்பு.

நேர்க்கோடும் வளைவரையும் ஊடறுத்துக் கொள்ளும் புள்ளிகளை இரண்டு சமன்பாடுகளையும் தீர்வு காணுதலால் பெறலாம்.



படம் 14.

பொதுவாகிய புள்ளிகளிடத்தில் $\frac{1}{4} x^2 = 3x$ எனப் பெறுகின்ருேம்.

$\therefore \quad x = 0$ அல்லது 12. ஆகவே, $y = 0$ அல்லது 36.

$\therefore \quad A$ என்னும் அச்சுத் தூரம் 12. பெறவேண்டிய பரப்பு

$$= \int_0^{12} 3x\,dx - \int_0^{12} \frac{1}{4} x^2\,dx$$

$$= \int_0^{12} \left(3x - \frac{1}{4} x^2\right) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right)_0^{12}$$

= 72 சதுர அலகுகள்.

மறுவழி : பெற வேண்டிய பரப்பை $PQSR$ போன்ற சிறு துண்டுகளது கூட்டுப் பலனின் வரம்பாகவும் கருதலாம்.

இப்பொழுது, $RP = MR - MP = 3x - \frac{1}{4}x^2$.

இதனுடன் $MN = \delta x$.

ஆகவே, பரப்பு $PQSR = \left(3x - \frac{1}{4}x^2\right)\delta x$. தோராயமாக.

$\delta x \to 0$ ஆகுமிடத்து இத்தோராய மதிப்பு சிறந்ததாகும்.

$$\therefore \text{ மொத்த பரப்பு} = \lim_{\delta x \to 0} \Sigma \left(3x - \frac{1}{4}x^2\right)dx$$

$$= \int_0^{12} \left(3x - \frac{x^2}{4}\right) dx = 72 \text{ சதுர அலகுகள்.}$$

பயிற்சி 5.2

1. $x^2 = 3y$ என்னும் வளைவரைக்கும் (i) X அச்சும், $x = 2$ என்னுமிடத்து நிலைத்தூரமும் (ii) Y அச்சும், $y = 3$ என்னுங் கோடும் (iii) $x = 2$, $x = 3.5$ என்னுமிடத்து நிலைத்தூரமும் ஆகியவற்ருல் அடைவுபட்ட பரப்பளவுகளைக் கண்டறிக.

2. $y^2 = 3x$ என்னும் பரவளைக்கும் (i) Y அச்சும் $y = 2$, என்னும் கோடும்; (ii) X அச்சும், $x = 3$ இடத்து நிலைத்தூரமும், (iii) $x = 4$ என்னுமிடத்து இரட்டை நிலைத்தூரமும் ஆகியவற்ருல் அடைவுபடும் பரப்புகளைக் கண்டறிக.

3. (i) $y=x^3$-ம், $y=x^2$-ம் ஆகிய வளைவரைகள் (ii) $y = x^3$, $y^2 = x$ ஆகிய வளைவரைகள், (iii) $y = x^2$-ம், $y^2 = x$-ம் ஆகிய வளைவரைகள் என்னும் இவற்றிடையே அடங்கி நிற்கும் பரப்புகளைக் கண்டறிக.

4. (i) X அச்சுக்கும், $y = x^2 - 2x - 3$ என்னும் வளைவரைக்கும் இடையிலுள்ள பரப்பைக் கண்டறிக. குறை இராசிப் பலனை விளக்குக. (ii) $6 + x - x^2$ என்னும் வளைவரைக்கும், X அச்சுக்கும் இடையே அகப்பட்டு நிற்கும் பரப்பைக் காண்க. (iii) $x^2 - 2x + 2y - 3 = 0$ என்னும் வளைவரைக்கும், X அச்சுக்கும் இடையிலடங்கியுள்ள பரப்பைக் கண்டறிக.

5. $y^2 = 2x$, Y அச்சு, $\frac{1}{2}$, 1 என்னும் அச்சுத் தொலைவி லுள்ள இரண்டு புள்ளிகளிலிருந்து Y அச்சுக்கு அமைந்த செங் குத்துக் கோடுகள் ஆகியவற்ருல் அடைவுபடும் பரப்பைக் காண்க.

6. $y = 6x - 5 - x^2$ என்னும் வளைவரைக்கும், $y=x+1$ என்னும் கோட்டிற்கும் இடையே அடங்கிய பரப்பைக் காண்க.

7. (i) X அச்சாலும், $\sin \frac{x}{3}$-ன் ஒரு வளைவாலும் அடங்கி நிற்கும் பரப்பளவைக் காண்க.

(ii) $y = \sin x$ என்னும் வளைவரைக்கும், $y = 1$ என்னும் நேர் கோட்டிற்கும், $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ என்னுமிடத்து நிற்கும் நிலைத்தூரங்களுக்கும் இடையே அமைந்துள்ள பரப்பைக் கண்டறிக.

(iii) $y = \cos x$ என்னும் வளைவரையும் இரு அச்சாயங்களும் ஆகியவற்ருல் அகப்பட்டுள்ள பரப்பைக் காண்க.

(iv) Y அச்சு, $y = \sin x$, $y = \cos x$ என்னும் வளைவரைகள் ஆகியவற்றிடை யடங்கியுள்ள பரப்பைக் கண்டறிக.

(v) $x = 0$, $x = \pi$ என்பவற்றிற்கு இடையில் $y = \cos x$ என்னும் வளைவரையால் அடைவுபடும் பரப்பைக் கண்டறிந்து, பூச்சிய பலனை விளக்குக. பரப்பின் எண்ணளவைப் பெறுக.

8. ஒரு வட்டத்தின் மையத்தில் 2α ஆரையன்களளவுள்ள கோணத்தை எதிருற்று நிற்கும் வட்டப்பகுதியின் பரப்பைத் தொகை காண் முறையால் அறிக.

9. $y^2 = 4(1-x)$-க்கும், Y அச்சுக்கும் இடையில் அடங்கி யுள்ள பரப்பைக் கணக்கிடுக.

10. $y^2 = 4(x - 2)$, அச்சாயங்கள், $y = 3$ என்பவற்ருல் அடங்கியுள்ள பரப்பை அறிக.

11. x அச்சுக்கும், $y = (3 - x)(x - 1)$ என்னும் வளை வரைக்கும் இடைப்படு பரப்பைக் காண்க.

12. $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ என்னும் வளைவரைக்கும், x அச்சுக்கும் இடையிலுள்ள இரண்டு பாகங்களின் பரப்பைக் கண்டறிக.

13. $y = x(x-3)^2$-க்கும், x அச்சுக்கும் இடையிலுள்ள பரப்பை அளவிடுக.

14. $y^2 = x^4(x+2)$ என்னும் வளைவரையின் தடத்தின் (loop) பரப்பைக் கண்டறிக.

15. $y = x^3 - 4x$ என்னும் வளைவரைக்கும்.

(i) $x = -1$-லிருந்து 0 வரையிலுள்ள நிலைத்தூரங்களுக்கு இடையிலும்,

(ii) $x = 0$, $x = 1$ வரையிலுள்ள நிலைத்தூரங்களுக்கு இடையிலும்,

(iii) $x = -1$-லிருந்து $x = 1$ வரையிலுள்ள நிலைத்தூரங்களுக்கு இடையிலுமுள்ள பரப்புகளைக் காண்க. இறுதிப் பலனானது பூச்சியமாதற்குரிய காரணத்தையும் விளக்குக.

16. $y = 3x^{\frac{1}{2}}$-ம், $15y = x^2 + 3$-ம் ஆகிய வளைவரைகளுக்கு இடையே அடங்கியுள்ள பரப்பைக் கண்டறிக.

17. $y = 4x - x^2$ என்னும் வளைவரையானது X அச்சை எப்புள்ளியிடத்தில் வெட்டும்? வளைவரையாலும், X அச்சாலும் அடக்கப்பட்ட பரப்பைக் கண்டறிக.

18. X அச்சாலும், $y = \sin x$ என்னும் வளைவரையின் ஒரு வளைவாலும் அகப்படுத்து நிற்கும் பரப்பைக் காண்க.

19. $y = x^2 + x$ என்னும் வளைவரை, X அச்சு, $x = 0$, $x = 6$ என்னுங் கோடுகள் ஆகியவற்றால் அடங்கி நிற்கும் பரப்பைக் காண்க.

20. ஒரு வளைவரை ஆதியின் வழியாகச் செல்லுகிறது. (x, y) என்னும் யாதொரு புள்ளியிடத்தேனும் அதன் சரிவு $1 - \frac{x^2}{3}$ ஆகும். எனின், அவ்வளைவரைவாலும், X அச்சாலும், $x = 1$, $x = 2$ என்னுமிடத்துள்ள நிலைத்தூரங்களாலும் அடக்கப்பட்டுள்ள பரப்பைக் கண்டறிக.

21. X அச்சாலும், $y = 4 + \cos x$ என்னும் வளைவரையாலும், $x = 0$, $x = 2\pi$ என்னுமிடத்துள்ள நிலைத்தூரங்களாலும் அடைபட்டு நிற்கும் பரப்பைக் காண்க.

22. X அச்சாலும், $y = x^2 - x + 1$ என்னும் வளைவரையாலும், $x = 1$, $x = 2$ என்னுமிடத்துள்ள நிலைத்தூரங்களாலும் அடைவுபடும் பரப்பளவை அறிக.

23. X அச்சு, $y = x^2 - 5x + 6$ என்னும் வளைவரை, $x = 2$, $x = 3$ என்னுமிடத்துள்ள நிலைத்தூரங்கள் ஆகியவற்ருல் அடங்கப் பெறும் பரப்பை யறிக.

24. $a^2 y = x^2(x + a)$ என்னும் வளைவரையாலும், ஆதிக்கும் $-a$ அச்சுத் தொலைவுக்கும் இடையிலுள்ள X அச்சாலும் அடைபட்டுள்ள பரப்பைக் கண்டறிக.

25. $0x$-க்கு மேல், $y = x^2 - \frac{x^4}{1000}$ என்னும் வளைவரைக்கும், x அச்சுக்கும் இடையிலுள்ள பரப்பைக் கண்டறிக.

சுழற்சியால் உருவாகுந் திண்மங்களின் கனபரிமாணங்கள்

(Volumes of solids of revolution)

X அச்சு, ஒரு வளைவரை, $x = a$, $x = b$ என்னுமிடத்து நிலைத்தூரங்கள் என்பனவற்றுள் அடங்கி நிற்குமொரு பரப்பை X அச்சைப் பற்றிச் சுழலுமாறு செய்தால் ஒரு கனவுருவம் அல்லது திண்மம் உருவாகும்.

ஓர் அரைவட்டப் பகுதியை அதன் அடைப்பாகிய விட்டத்தைப் பற்றிச் சுழற்றினும் அல்லது வட்டமொன்றை அதன் விட்டங்களுள் யாதொன்றனைப் பற்றியேனும் சுழற்றினும் ஒரு திண்மக் கோளம் உருவாகும்.

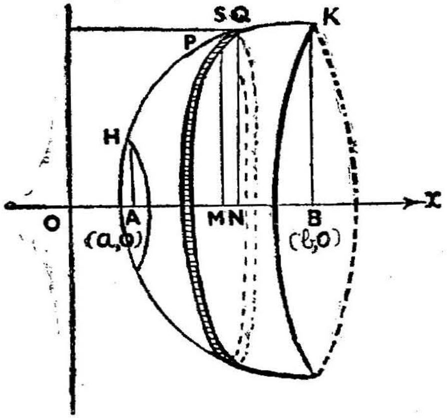
ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தைச் செங்கோணத்தை யடக்கி நிற்கும் பக்கங்களுளொன்றனைப் பற்றிச் சுழலுமாறு செய்தால், ஓர் ஒழுங்கான கூம்புத் திண்மம் உருவாகும்.

ஒரு செவ்வகப் பட்டை வடிவாகிய துண்டினை அதன் பக்கங்களுளொன்றைப்பற்றிச் சுழலவிடுத்தால், ஓர் ஒழுங்கான உருளைத் திண்மம் உருவாகும்.

[X அச்சோ அல்லது உருவாகும் பரப்பு சுழலா நிற்குங்கால், சுழற்சிக்குப் பற்றுகிய கோடோ சுழற்சித் திண்மத்தின் அச்சு எனப்படும். இங்ஙனம் சுழல் முறையால் உருவாகுந் திண்மங்களினது அச்சுக்குச் செங்குத்தாகிய தளங்களால் ஊடறுக்கப்படும் முகப்பட்டைகளெல்லாம் வட்டங்களாகவே விளங்கும்.]

சுழற்சியால் உருவாகும் திண்மத்தின் பருமனை அறிவிக்கும் கோவை (Expression for the volume of a solid of revolution)

HK என்பது $y = \phi(x)$ என்னும் வளைவரையினது ஒரு பகுதியாகட்டும். அதன் மேல் a-ம் b-ம் ஆகிய அச்சுத்தூரங்களையுடைய புள்ளிகள் முறையே H, K ஆகுக. HA, KB என்னும் நிலைத்தூரங்களை வரைக. $ABKH$ என்னும் பரப்பு X அச்சைப் பற்றுகக் கொண்டு சுழலுமானால், ஒரு திண்மம் உருவாகும்.



படம் 15.

அத்தகைய திண்மத்தின் பருமனைக் கண்டறிய வேண்டுதல்

ஒரு கூட்டுப்பலனின் வரம்பாகக் கனபரிமாணத்தைக் கருதுதல் (Volume considered as the limit of a sum):

ABஐ ஒவ்வொன்றும் δx-க்குச் சமமாகிய பல சமபாகங்களாகப் பிரிக்க. இப் புள்ளியிடங்களில் நிலைத்தூரங்களை நிறுத்தி HK என்னும் வில்லை P, Q முதலாகிய புள்ளிகளில் சந்திக்கும்படியாகச் செய்க. அப்பொழுது முழு பரப்பும் மாதிரியாகிய $PMNQ$ என்னும் குறுகிய பட்டைக்கு ஒத்தனவாகிய பல துண்டுகளாகப் பகுக்கப்படுகின்றது. முழு பரப்பும் OXஐப்பற்றிச் சுழலும்பொழுது,

ஒவ்வொரு சிறிய பட்டையும் ஒரு திண்மத் துண்டை உருவாக்கு கின்றது. $\delta x \to 0$ ஆகுமிடத்து ஒவ்வொரு துண்டும் y ஆர முடைய வட்டமுகம் வாய்ந்த அடித்தளத்தின்மேல் δx உயரமுள்ள தாகும். இக் குறுகிய திண்மத்துண்டின் கனபரிமாணமானது δV என்று குறிப்பிடப்பட்டால், அப்பொழுது δV ஆனது போதிய அளவு சரியாக $\pi y^2 \delta x$ ஆல் குறிப்பிடப்படும். $x = a$-லிருந்து $x = b$ வரையில் சுழற்சி வகையால் உருவாகும் திண்மத்தின் கனபரிமாணமானது இப் பருமனையுண்டாக்கும் அளவிறந்த வட்ட சக்கரங்கள் அவற்றின் எண்ணிக்கை அளவிறந்து மிகுதிப் படுத்துங்கால், பருமனது கூட்டுப்பலனது எல்லையாகும்.

$$\therefore \quad V = \Sigma \delta V = \lim_{\delta x \to 0} \sum_{x=a}^{x=b} \pi y^2 \delta x = \int_a^b \pi y^2 \delta x$$

தொகை நுண்கணிதத்தின் அடிப்படையான தேற்றப்படி.

மறுவழி: நாம் பகுதி 5.5-ல் கூறிய முறையைப் பின்பற்றிக் கனபரிமாணத்தைக் காணலாம்.

$P(x_1 y)$ என்னும் புள்ளி வழியாக வரையப்படும் மாறுறு நிலைத் தூரம் MP ஆகுக. X அச்சைச்சுற்றி $AMPH$ சுழலுங்காலத்தில் வடிவெய்தும் கனபரிமாணம் V எனின், அப்பொழுது V ஆனது x-ன் சார்பலனுகும். NQ என்பது அயலதாகிய $Q(x + \delta x, y + \delta y)$ என்னும் புள்ளி வழித்தாகும் நிலைத்தூரமெனின், அப் பொழுது $PMNQ$ என்னும் பட்டையானது X அச்சைச் சுற்றிச் சுழலுங்காலத்தில் உண்டாகும் கனபரிமாணம் δV ஆல் குறிப்பிடப் படுவதாகும்.

இப்பொழுது δV ஆனது $PMNR$ என்னுஞ் செவ்வகப்பட்டை யின் சுழற்சியால் வடிவெய்தும் திண்மத்திற்கும், $SMNQ$ என்னுஞ் செவ்வகப்பட்டையின் கழற்சியால் வடிவெய்தும் திண்மத்திற்கும் இடைப்பட்டு இருக்கும்.

அதாவது δV ஆனது $\pi y^2 \delta x$-க்கும், $\pi (y+\delta y)^2 \delta x$-க்கும் இடைப்பட்டிருக்கும்.

$\therefore \ \dfrac{\delta V}{dx}$ ஆனது πy^2-க்கும், $\pi(y + \delta y)^2$-க்கும் இடையி லிருக்கும்.

$\therefore \quad \frac{dV}{dx} = \pi y^2$; δx V-ன் $\delta y \to 0$ ஆதலின்.

இப்பொழுது $V = 0$, $x = a$ ஆகுமிடத்து $\therefore \quad C = -f(a)$

$$\therefore \quad V = f(x) - f(a)$$

MP ஆனது BK-யுடன் இணையும்பொழுது அதாவது $x = b$ ஆகும்பொழுது, நாம் V-ன் மதிப்பைப் பெற விரும்புகிறோம்.

$$\therefore \quad \text{விரும்பிய கனபரிமாணம்} = f(b) - f(a) = \int_a^b \pi y^2 dx$$

குறிப்பு 1 : வளைவரை; $y = C$, $y = d$ என்னும் நேர்க் கோடுகள், y அச்சு என்னுமிவற்றால் உள்ளடக்கப்பட்ட பரப்பானது Oyஐப் பற்றிச் சுழலுங்காலத்தில், அதன் கன பரிமாணம்

$$= \int_c^d \pi x^2 dy \text{ ஆகும்,}$$

குறிப்பு 2 : சுழற்சி முறையால் உருவாகும் திண்மத்தின் கன பரிமாணத்தை நிர்ணயிப்பதற்கண் தொடர்புறும் படிமுறைச் செய்கையைப் பின் வருமாறு அமைவுறுத்தலாம் :

(i) விரும்பிய கன பரிமாணத்தை யுருவாக்க வரைபடம் சுழல்வுறப் பற்றுக நிற்கும் அச்சைக் கண்டுபிடித்து அதை X அச்சாகவும், அதற்குச் செங்குத்தாகுங் கோட்டினை y அச்சாகவுங் கொள்க.

(ii) தேர்ந்தெடுத்த அச்சினைப்பற்றி சுழற்சியுறும் வரை படத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டறிக.

(iii) x-க்கு வரம்புகளைக் கண்டறிக. இவ்வரம்புகள் $x = a$-லிருந்து $x = b$ வரையில் உளதானல், அப்பொழுது பரப்பினுல் உருவாகும் திண்மத்தின் கனபரிமாணம்

$$= \int_a^b \pi y^2 dx. \text{ ஆகும்.}$$

அல்லது இவ்வாறுகவும் காணலாம் :

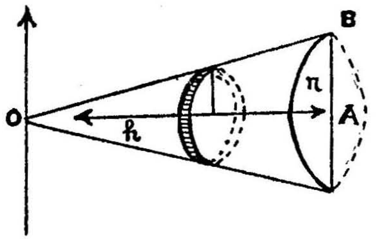
திண்மத்தின் கனபரிமாணமானது சுழற்சிக்குரிய அச்சுக்குச் செங்குத்தாகிய மெல்லிய பல பட்டைகளாகப் பகுக்கப்படும். அப்பொழுது x, $x + \delta x$ என்னுமிடத்து நிற்கும் நிலைத்தூரங்களுக்கு

இடையில் யாதேனுமொரு குறிப்பிட்ட சிறிய பட்டையை யெடுத்துக்கொண்டு அதன் கனபரிமாணத்தை ($\pi y^2 dx$) எனக் குறிப்பிடுக. பிறகு கிடைத்த பலனை தகுந்த எல்லைகளுக்குள் எல்லா பட்டைத் துண்டுகளும் அடங்கிக் கிடப்பதாக்கித் தொகை காண்க.

விளக்க உதாரணம் 1

உயரம் h-ம், ஆரம் r-ம் உடையதொரு ஒழுங்கான வட்ட அடித்தளமுடைய கூருருளையின் கன பரிமாணத்தைத் தொகை காண் முறையால் கண்டறிக.

கூருருளையின் உச்சியை ஆதியாகவும், அதன் அச்சை X அச்சாகவுங் கொள்க. அக்கூருருளையை $\triangle OAB$ என்னும் செங் கோணமானது OAஐப் பற்றிச் சுழல்வுறுவதால் உருவானதாகக் கருதுவோம்.



படம் 16.

OB என்னும் அடைவுபடுத்துங் கோட்டின் சமன்பாட்டைப் பின் வருமாறு காணலாம் :

OB என்னும் நேர்க்கோடு ஆதியின் வழியாகச் செல்லுதலால், அதன் சமன்பாட்டை $y = mx$ எனக்கொள்ளலாம்.

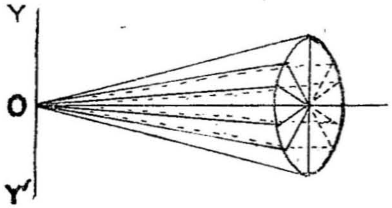
இப்பொழுது $m = \tan \underline{|AOB} = \frac{r}{h}$

$\therefore$ OB-ன் சமன்பாடு $y = \frac{r}{h} x$ ஆகும்.

$\therefore$ கூருருளையின் பருமன்

$$= \int_0^h \pi y^2 dx = \int_0^h \pi \frac{r^2}{h^2} x^2 dx$$

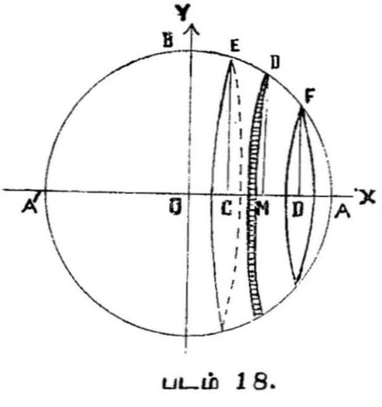
$$= \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]^h = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h.$$



படம் 17.

விளக்க உதாரணம் 2

(i) ஆரம் a உடைய கோளம் (ii) a ஆரமுடைய கோளத்தில் h உயரமுடையதாக வெட்டப்படும் துண்டு (iii) a ஆரமுடைய தொரு கோளத்தில் மையம் O-விருந்து முறையே a, b தொலைவி லுள்ள தளங்களுக்கு இடையிலுள்ள கோளப்பகுதி—என்னுமிவற் றின் கனபரிமாணங்களைக் காண்க.



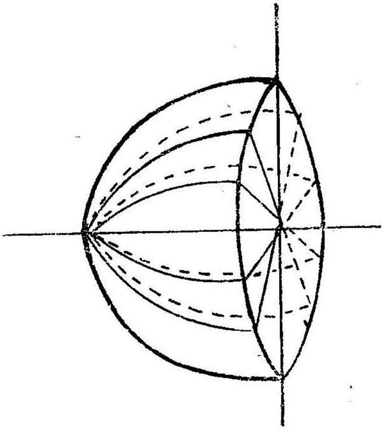
படம் 18.

(i) கோளத்தை $A'BA$ என்னும் அரை வட்டமானது $A'A$ என்னும் விட்டத்தைப் பற்றிச் சுழலுவதனுல் உருவாகுவதாகக் கருதுவோம். வட்டத்தின் மையத்தில் ஆயத் தொலைவுகளின் ஆதியை வைத்து வட்டத்தின் சமன்பாட்டை $x^2 + y^2 = a^2$ என்றெழுதலாம்.

ஆகவே, கனபரிமாணம்

$$= \int_{-a}^{a} \pi y^2 \, dx = \pi \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2) \, dx$$

$$= \pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3} \pi a^3$$



படம் 19.

(ii) h உயரமுடைய கோளப் பகுதியின் கனபரிமாணம்

$$= \int_{a-h}^{a} \pi y^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{a-h}^{a} (a^2 - x^2) \, dx$$

$$= \pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{a-h}^{a}$$

$$= \pi \frac{h^2}{3} (3a - h)$$

(iii) 0 என்னும் மையத்திலிருந்து c, d தூரங்களில் உள்ள தளங்களுக்கு இடைப்படும் கோள மண்டலத்தின் கனபரிமாணம்

$$= \int_c^d \pi y^2 \, dx$$

$$= \int_c^d \pi (a^2 - x^2) dx = \pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_c^d$$

$$= \pi a^2 (d-c) - \frac{1}{3} \pi (d^3 - c^3)$$

பயிற்சி 5.3

1. X அச்சாலும், $2y = 3x - 5$ என்னும் நேர்க்கோட்டாலும், $x = 2$, $x = 3$ என்னுமிடத்துள்ள நிலைத் தூரங்களாலும் அடக்கியுள்ள பரப்பானது (i) X அச்சையும் (ii) Y அச்சையும் பற்றிச் சுழலுங்காலங்களில் உருவாகும் கனபரிமாணங்களைக் கண்டறிக.

2. $16y^2 = 121x$ என்னும் பரவளையில் $x = 4$ என்னுமிடத்துள்ள இரட்டை நிலைத்தூரத்தால் வெட்டப்பட்ட துண்டமானது உச்சியில் நிற்கும் தொடுகோட்டைப் பற்றிச் சுழலுகிறது. எனின், உருவாகும் கனபரிமாணத்தைக் கணக்கிடுக.

3. $4x^2 + 9y^2 = 36$ என்னும் வளைவரையானது (i) X அச்சையும் (ii) y அச்சையும் பற்றிச் சுழலுவதால் உருவாகும் திண்மத்தின் பருமனைக் கண்டறிக.

4. 18″ ஆழமுள்ள தொட்டியின் வட்டவடிவமாயமைந்த தலையும் அடியுமாகியவற்றின் விட்டங்கள் 16″-ம் 8″-ம் ஆனால், அதன் கொள்ளளவைக் காண்க.

5. 6″ ஆரமுள்ள அரைக்கோள வடிவாகிய ஒரு கிண்ணத்தில் 3″ ஆழத்திற்குத் தண்ணீர் இருக்கிறது. அதிலடங்கியுள்ள நீரின் கனபரிமாணத்தைக் காண்க. அதில் மேலும் எவ்வளவு நீரை ஊற்றினால் அதனாழம் 4″ அதிகமாகும்?

6. ஆரம் a யுள்ளதொரு கோளத்திலிருந்து h உயரமுள்ள பகுதி வெட்டியகற்றப்படுகிறது. அப்பகுதியின் கனபரிமாணம் எவ்வளவு? ஆகவே, a ஆரமுள்ள கோளத்தின் பருமனை வருவிக்க.

7. X அச்சைப்பற்றி $y = \sin x$ $0 \leqslant x \leqslant \pi$) ஐ ஒரு முழுச் சுற்று சுற்றுவதால் உருவாகும் கனபரிமாணத்தைக் கண்டறிக.

8. $y^2 = 25x$ என்னும் பரவளையில் $x = 1$-க்கும், $x = 2$-க்கும் இடையிலுள்ள வில்லானது அச்சைப்பற்றி யொரு முழுச்சுற்று திரும்புவதனுல் உருவாகும் பருமனைக் காண்க.

9. a ஆரமுள்ள கோளத்தின் பருமனைக் கண்டறிக.

10. அடித்தளத்தின் ஆரம் r-ம். உயரம் h-ம் உடையதொரு கூம்பின் கனபரிமாணத்தைத் தொகை காண் முறையால் அளவிடுக.

11. $y^2 = 4x$ என்னும் வளைவரை. X அச்சு. $x = 3$ இடத்துள்ள நிலைத்தூரம் ஆகியவற்ருல் அடங்கி நிற்கும் பரப்பானது X அச்சைப்பற்றிச் சுழன்ருல் உருவாகும் திண்மத்தின் பருமன் எவ்வளவாகும்?

12. $y^2 = x^5$-ம் $x = 3$-ம் அடக்கிக்கொண்டுள்ள பரப்பை X அச்சைப்பற்றிச் சுழற்றுவதால் உண்டாகும் பருமன் எவ்வளவு?

13. ஆரத்தின் $\frac{3}{5}$ பங்கு உயரங்கொண்டதொரு கோளப் பகுதியின் பரிமாணத்தைத் தொகை காண் வகையால் கண்டறிக. அக் கனபரிமாணமானது கோளப் பகுதியில் உயரத்திற்குச் சமமான ஆரத்தையுடையதொரு கோளத்தின் பருமனுக்குச் சமமாகுமெனக் காட்டுக.

14. $y = 2 \sin 3x$ என்னும் வளைவரையில் அது X அச்சை முதற்கண் வெட்டுமிடத்திற்கும், ஆதிக்கும் இடையிலுள்ள அதன் பகுதியை X அச்சைப் பற்றிச் சுழற்றுவதால் விளையும் பருமனைக் காண்க.

15. $x = 1$ என்னுமிடத்தில் இரட்டை நிலைத்தூரத்தால் அகப்படுத்தப்பட்டுள்ள $y^2 = 16$ என்னும் வளைவரையை X அச்சைப் பற்றிச் சுழற்றுவதால் உண்டாகும் திண்மத்தின் பருமனைக் கண்டறிக.

16. $x = 0$-விருந்து $x = 2\pi$ வரைக்குமுள்ள $y = 1 - \cos x$ என்னும் வளைவரையின் பகுதியை X அச்சைப் பற்றிச் சுழற்றுவதால் வடிவெய்தும் மேற்றளத்திற்குள்ளடங்கிய கனபரிமாணத்தைக் கண்டறிக.

நுண்கணிதத்தின் மாதிரி கணக்குகள் I

(பாடத்திட்டத்தை வரையறுப்பன)

1. xஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்க. $x \sin x$. $\cos^2 x$

2. $y = (2x+1)(3x^2+1)$ ஆனால். $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐக் காண்க.

3. $y = a\cos nx + b\sin nx$ (a, b, n-கள் மாறிலிகளாகும்.) ஆனால், $\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 0$ என நிரூபிக்க.

4. $y = x^3 - 2x^2 + x$ என்னும் வளைவரையின்மேல் X அச்சுக்கு ஒரு போகாக விளங்கும் தொடுகோடு அமைதற்கு உரிய இடத்தைக் குறிப்பிடுக.

5. $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ என்னும் வளைவரைக்கு $(1, 0)$; $(2, 0)$; $(3, 0)$ என்னுமிடங்களில் ஏற்படும் சரிவுகளைக் கண்டறிக.

6. $y = 3x^2 + 2x + 1$ என்னும் வளைவரைக்கு $x = 1$ என்னுமிடத்து அதன் மேலுள்ள புள்ளியின் கண் அமையும் தொடுகோட்டிற்குரிய சமன்பாட்டைக் கண்டறிக.

7. மேனோக்கி எறியப்படுவதொரு துகள் t செகண்டில் எழுந்து சென்ற S தூரம் $S = 80t - 16t^2$ என்னும் நியமித்திற்குள்ளாகும். அத் துகளால் அடையப்பட்ட மீப்பேருயரத்தைக் காண்க.

8. ஒரு செவ்வகத் தகடானது 8′-க்கு 6′ அளவுள்ளது. ஒவ்வொரு முனையிலும் சம பரப்புள்ள சதுரங்கள் வெட்டி எறியப்படுகின்றன. எஞ்சியுள்ள விளிம்பை மடித்துத் திறந்தபடியான செவ்வகப் பெட்டி ஒன்று செய்யப்படுகின்றது. செவ்வகப் பெட்டியின் கொள்ளளவு மீப்பேரளவு உள்ளதாகுமாறு அமைக்கப்பட வேண்டுமானால், வெட்டப்பட்ட சதுரத்தின் பக்கத்தை அளவிடுக.

9. $S = 50t - 16t^2$ என்பதற்கேற்ப மேலெறியப் பட்ட ஒரு கல்லானது t நேரத்தில் s உயரம் எழும்புகிறது. $\frac{ds}{dt}$ என்பது எதைக் குறிக்கின்றது? $t = 1$ ஆகும்பொழுது அதன் மதிப்பென்ன? $\frac{ds}{dt}$ -ன் குறை இராசி மதிப்பின் பொருள் யாது?

10. வகையீட்டுத் குணகத்தின் குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தி (i) r அங்குலம் நீளமுள்ள ஆரத்தைப் பொறுத்து ஒரு வட்டத்தின் A சதுரம் அங்குலமுள்ள பரப்பின் மாறுபடு வீதமானது r-க்கு விகித சமமாகும். (ii) ஒரு சுழலும் பொருளின் கோண வேகமானது ஆரம்பத்திலிருந்து t செகண்டில் அது திரும்பிய θ கோணத்திற்கு விகித சமமாகும் எனக் கூறுக.

11. ஒரு நேர்க் கோட்டில் f அளவு சீரான முடுக்கத்துடன் இயங்குவதொரு துகளானது அதன் வேகம் v ஆகுங்கால், t செகண்டு நேரத்தில் s தூரம் செல்லுவதாகும். ஆரம்பத்தில் $t = 0$, ஆகும்பொழுது $S = 0$ ம் $v = u$-ம் ஆகுமெனத் கொண்டு s-க்கும், t-க்கும் உள்ள தொடர்பைக் கண்டறிக.

12. $\frac{dy}{dx} = x^2$-ம், $y = 1$-ம் ஆகும். $x = 1$ ஆகும்பொழுது எனின், y ஐ x-ன் சார்பாகக் கூறுக.

13. மதிப்பைக் காண்க: $\int (x^2 + x + 1)\, dx$; $\int 2\cos 3x\, dx$ $\int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x)\, dx$.

14. $x^2 = 4y$ என்னும் வளைவரை, X அச்சு, $x = h$ இடத்து நிலைத்தூரம் ஆகியவற்றால் அடங்கப்பெறும் பரப்பைக் காண்க.

15. ஆரம் r உள்ள வட்டத்தின் பரிதி $2\pi r$ எனக் கொள்ளுவதன்றி வட்டத்தின் பரப்புக்கு உரிய சூத்திரத்தைக் கொள்ளாமல், r-ம் $(r + \Delta r)$-ம் ($\Delta r \to 0$-ம் சிறியதும்) ஆரமாகக் கொண்டுள்ள இரண்டு ஏக மைய வட்டங்களுக்கு இடையே அடங்கியுள்ள பரப்பு தோராயமாக $2\pi r\, \Delta r$ ஆகுமென நிரூபிக்க.

தொகை காண் முறையால் ஆரம் r உடைய வட்டத்தின் பரப்பு πr^2 ஆகுமென வருவிக்க.

16. X அச்சாலும், $y = \sin x$-ன் ஒரு வளைவாலும் அடங்கப் பெறும் பரப்பை யறிக.

17. a ஆரமுள்ள கோளத்திலிருந்து h உயரமுள்ள துண்டு வெட்டப்படுகின்றது. அத்துண்டின் கனபரிமாணத்தைக் காண்க.

நுண்கணிதத்தின் மாதிரி கணக்குகள் II

(பாடத்திட்டத்தை வரையறுப்பன)

1. மதிப்பிடுக :

(i) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ (ii) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$

(iii) $\lim_{\theta\to 0} \frac{\tan a\theta}{\tan b\theta}$ (iv) $\lim_{\theta\to 0} \frac{\tan^2 3\theta}{\theta^2}$

(v) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

2. பின் வருவனவற்றிற்கு xஐப் பொறுத்து வகையீட்டுக் குணகத்தைக் காணல் :

(i) $\frac{x^{\frac{8}{3}} + x^{\frac{8}{3}}}{2}$ (ii) $20x^5 + 6x^3 + 7x - 1 - \frac{1}{x^2}$

(iii) $\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$, (iv) $5 \sin 3x - \cos 4x$

(v) $(4 - x^2)^{100}$ (vi) $\sqrt[3]{5x^4} + 7$ (vii) $\cos\left(\frac{x^3}{8}\right)$

(xii) $\frac{x + \sin x}{\sec x}$ (xiii) $\tan(\sin x)$ (xiv) $\sin(\cos x)$

(xv) $(2x - 1)(3x^2 + 1)$ (xvi) $x \sin x$ (xvii) $\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$

(xviii) $\sin 3x \cos x$ (xix) $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

(xx) $x \tan^3 x + (2x + 1)\sin^2 x$ (xxi) $\frac{x}{\sqrt{x + 1}}$

(xxiii) $\frac{x^3}{x + 1}$ (xxiii) $(2x + 1)\sin^2 x$

3. (i) $y = \sin 3x - \cos x$ ஆனால்,

$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$ எனக் காட்டுக.

(ii) $y = ax - bx^2$ ஆனால்,

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2y = 2x \frac{dy}{dx}$$ என நிரூபிக்க.

(iii) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ஆனால்,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2a^3 xy}{(ax - y^2)^3}$$ எனக் காட்டுக.

(iv) $y = x^2 \cos x$ ஆனால்,

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + (x^2 + 6)y = 0$$

எனக்காட்டுக.

(v) $y = \cos x$ ஆனால்,

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + (x^2+2)y = 0$$

எனக்காட்டுக.

(vi) $xy^2 = 16$ ஆனால், $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

4. (i) $y = x^2 - 3x + 5$ என்னும் வளைவரையின் மேல் $x = 2$ ஆகுமிடத்துள்ள புள்ளிக்கண் வரையும் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டை வரைக.

(ii) $y = 2x - x^2$ என்னும் வளை வரையின் மேலுள்ள $(3, -3)$ என்னும் புள்ளிக்கண் வரையும் தொடு கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(iii) ஒரு கோளத்தின் ஆரமானது 2 செ. மீ. / விஞடி வீதத்தில் பெருகுவதாயின், அதன் ஆரம் 8 செ. மீ. உள்ளபொழுது அதன் கனபரிமாணம் என்ன வீதத்தில் பெருகுமெனக் கண்டறிக.

(iv) மணலானது தரையின்மேல் 1 நிமிடத்தில் 2 கனஅடி வீதம் கொட்டப்படும்பொழுது, அக் குவியலானது ஆரத்திற்கு ஒத்த உயரமுடையதாகியதொரு கூம்பாக வடிவுறுகிறது. உயரம் 1 அடியாகும்பொழுது அவ்வுயரம் வளரும் வீதத்தைக் கண்டறிக.

(v) சரிவுப்பக்கம் l ஆகவுடையதோர் ஒழுங்கான கூம்பின் மீப்பெரு கனபரிமாணத்தைக் கணக்கிடுக.

(vi) $(1 + \cos x)\sin x$ ஆனது $x = \frac{\pi}{3}$ ஆகும்பொழுது மீப்பெரு மதிப்பையுடையதாகுமெனக் காட்டுக.

(vii) $4x^3 - 21x^2 + 18x + 20$-ன் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளைக் காண்க.

(viii) $y = x + 4/(x + 2)$-ன் மீப்பெரு மதிப்பைக் காண்க.

(ix) ஒரு வட்ட வடிவமாகிய எண்ணெய்ப் பொட்டானது நீரின்மேல் செகண்டுக்கு 2 சதுர செ.மீ. வீதம் பரப்பு பெருகப்பெறுகிறது. அவ்வட்டத்தின் ஆரம் 5 செ.மீ. ஆகுங்கால், அவ்வாரம் எவ்வீதத்தில் நீளுவதாகும்?

(x) ஒரு நேர்க்கோட்டில் இயங்கும் துகளானது t நேரத்தில் கடந்த தூரம் S ஆனது $s = 35t + 21t^2 - 14t^3$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு செகண்டு கழிந்த பின் பெற்ற வேகத்தையும், அதன் முடுகக்கம் 380 ஆவதற்குக் கொள்ளும் நேரத்தையுங் காண்க.

5. பின் வருவனவற்றிற்கு x ஐப் பொறுத்துத் தொகை காண்க:

(i) $(x + 2)(x - 3)$ (ii) $x^5 \sqrt{a^3 + x^4}$,

(iii) $2\cos 3x + 5\sin 6x$ (iv) $\cos^2 x$

(v) $x^{-8/3} + 4\sin x + 3x^2$ (vi) $(4x^2 + 9)^2$

(vii) $x(x + 4)^2$ (viii) $\cos x \cos 4x$

(ix) $2x^4 - 3x^3 + 7x + \sqrt{x}$ (x) $\cos x/(1 + \cos x)$

(xi) $ax^3 + bx^2 + (x + d)$ (xii) $\sin 5x \sin x$

(xiii) $x^3 + 4\sin 2x$ (xiv) $\cos 4x \sin 3x$.

6. பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக :

(i) $\int_{1}^{2} \frac{3x^3 - x^4}{x^2}\, dx$ (ii) $\int_{0}^{\pi} \cos \frac{x}{3}\, dx$,

(iii) $\int_{0}^{\pi/2} (\sin 4x + \cos 3x)\, dx$ (iv) $\int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\, dx$,

(v) $\int_{0}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{3}\, dx$, (vi) $\int_{0}^{\pi/6} \cos^2 \frac{x}{2}\, dx$

(vii) $\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 x\, dx$.

7. (i) $x = 0$-லிருந்து $x = \frac{\pi}{a}$ வரையில் $y = \sin ax$ என்னும் வளைவரையால் அடக்கிக் கொள்ளப்பட்ட பரப்பைக் கண்டறிக.

(ii) $y = 4x^2$ என்னும் வளைவரை, X அச்சு, $x = h$ என்னுமிடத்துள்ள நிலைத்தூரம் ஆகியவற்றுள் அடங்கியிருக்கும் பரப்பை அளவிடுக.

(iii) $y = 4x^2 - 4x + 3$ என்னும் வளைவரைக்கும் X அச்சுக்கும் இடையிலடங்கியுள்ள பரப்பைக் கணக்கிடுக.

(iv) $x = 0$-லிருந்து $x = \frac{\pi}{2}$ வரையில் $y = \cos x$ என்னு வளைவரையால் அடங்கப் பெற்றிருக்கும் பரப்பை X அச்சைப் பற்றிச் சுற்றினால் உருவாகும் திண்மையின் கனபரிமாணத்தைக் கணக்கிடுக.

(v) $x^2 = 4y$ என்னும் வளைவரை, X அச்சு, $x = 2$ என்னுமிடத்துள்ள நிலைத்தூரம் ஆகியவற்றால் அடங்கியுள்ள பரப்பைக் கண்டறிக.

8. தொகை காணலைப் பயன்படுத்தி a ஆரமுள்ள கோளத்தின் கனபரிமாணத்தைக் கணக்கிடுக.

சூத்திரங்களின் பட்டியலும் முக்கியமான பலன்களும்

அத்தியாயம் 1. எல்லை மதிப்புகள் :

1. $\underset{x \to a}{\text{lt}} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = n\, a^{n-1}$

2. $\underset{\theta \to 0}{\text{lt}} \dfrac{\sin \theta^c}{\theta}$ 3. $\underset{\theta \to 0}{\text{lt}} \dfrac{\tan \theta^c}{\theta} = 1$

அத்தியாயம் 2. வகையீடு (differentiation) :

4. $\dfrac{dy}{dx} = \underset{\theta \to 0}{\text{lt}} \dfrac{\delta y}{\delta x}$ 5. $\dfrac{d}{dx}(x^n) = n.x^{n-1}$.

6. $\dfrac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ 7. $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = - \sin \dfrac{1}{x}$

8. $\dfrac{d}{dx}(C) = 0$ 9. $\dfrac{d}{dx}(x) = 1$

10. $\dfrac{d}{dx}(u \pm v) = \dfrac{du}{dx} \pm \dfrac{dv}{dx}$

11. $\dfrac{d}{dx}(uv) = u \dfrac{dv}{dx} + v \dfrac{du}{dx}$

12. $\dfrac{d}{dx}(Cu) = C \dfrac{du}{dx}$

13. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \left(v \dfrac{du}{dx} - u \dfrac{dv}{dx} \right) / v^2$

14. $\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

15. $\dfrac{d}{dx}(\text{cosec}\, x) = - \text{cosec}\, x \cot x$

16. $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ 17. $\dfrac{d}{dx}(\cot x) = - \text{cose}^2 x$

18. $y = f(u)$-ம், $a = \phi(x)$-ம் ஆனல், $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} - \frac{du}{dx}$

19. $\frac{dy}{dx} = 1 \,/\, \frac{dx}{dy}$

20. $x = f(t)$-ம், $y = \phi(t)$-ம் ஆனல், $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \,/\, \frac{dx}{dt}$

அத்தியாயம் 3. வகையீட்டின் பயன்பாடுகள் :

21. $y = f(x)$ என்னும் வளைவரையின் மேல் (n_1, y_1) என்னுமிடத்தில் அமையும் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$

22. (x_1, y_1) என்னுமிடத்தில் அமையும் செங்கோட்டின் சமன்பாடு $y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$.

23. இரண்டு வளை வரைகள் (x_1, y_1) என்னுமிடத்தில் ஊடறுத்து நிற்குமாயின், அவ்விடத்தில் அவற்றின் சரிவுகள் m, m' ஆகவும், இடைநிலைக் கோணம் α ஆகவும் இருக்குமானல்,

$$\alpha = \frac{m - m'}{1 + mm'} \text{ ஆகும்.}$$

24. ஒரு வளைவரையில் (x, y) என்னுமிடத்தில் அமையும் செங்கோட்டடி, தொடுகோட்டடி, செங்கோடு, தொடுகோடு ஆகியவற்றின் நீளங்கள் முறையே,

$$yy_1 ; \frac{y}{y_1} ; \quad y\sqrt{1 + y_1^2} ; \quad \frac{y\sqrt{1 + y_1^2}}{y_1} \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு y_1 = குறிப்பிட்ட புள்ளியிடத்தில் $\frac{dy}{dx}$-ன் மதிப்பாகும்.

25. x-ல் வழுவோ பெருக்கமோ δx ஆயின், அதையொட்டி y-ல் ஏற்படும் வழுவோ பெருக்கமோ $\delta y = \frac{dy}{dx} \cdot \delta x$ எனக் குறிப்பிடப்படும்.

26. $x=a$ என்னுமிடத்தில் $f'(x)$ மிகை இராசியானால், $x=a$ என்னுமிடத்தில் $f(x)$ என்பது x-ன் வளரும் சார்பலனாகும். $x=a$ என்னுமிடத்தில் $f'(x)$ குறை இராசியானால், $x=a$ என்னுமிடத்தில் $f(x)$ ஆனது x-ன் குறைவுறு சார்பலனாகும்.

27. மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளைப் பெறுவதற்கு விதி :

(i) $f'(x)$ ஐக் காண்க. (ii) $f'(x)=0$ க்கு தீர்வு கண்டு மூலங்களை அறிக. இம்மூலங்கள் a, b முதலாகிய கணநிலை மதிப்புகளைத் தருகின்றன. (iii) $f'(x)$ ஐக் கண்டு, a, b முதலாகிய கணநிலை மதிப்புகளை x-க்கு பதிலாகப் பிரதியிடுக. $f''(a)$ குறை இராசியானால் $x=a$ ஆனது சார்பலனை மீப்பெரு மதிப்புடையதாக்கும்; $f''(a)=0$ ஆனால் இச்சோதனை தவறும். இவ்வகையில் $f'(a-h)$ ஐயும், $f''(a+h)$ ஐயும் அறிக. வகைகெழுவின் இராசிக்குறி மிகை இராசியிலிருந்து குறை இராசிக்கு மாறுமானால் $x=a$ என்னுமிடத்துச் சார்பலனானது மீப்பெரு மதிப்பைப் பெறும்; ஆனால் வகைகெழுவின் இராசிக்குறி குறை இராசியிலிருந்து மிகை இராசிக்கு மாறுமானால், $x=a$ என்னுமிடத்தில் சார்பலனானது மீச்சிறு மதிப்பையுடையதாகும். x ஆனது $x=a$ என்னும் மதிப்புவழியே பெருகும்பொழுது ($f'(x)$ ஆனது இராசிக்குறி மாறப்பெறுதாயின், அப்பொழுது $x=a$ என்னுமிடத்தில் $f(x)$-க்கு மீப்பெரு மதிப்போ, மீச்சிறு மதிப்போ யாதொன்றுமில்லையாகும்.

28. வேகம் முதலியவற்றிற்குக் கோவை :

(i) $v = \dfrac{ds}{dt}$

(ii) α (வேக முடுக்கம்)

$$= \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = v\frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(v^2)$$

(iii) F (ஆற்றல், சக்தி) $= \dfrac{d}{dt}(mv) = \dfrac{d}{ds}\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)$

(iv) w (கோண வேகம்) $= \dfrac{d\theta}{dt}$

(v) கோண வேக முடுக்கம்

$$\frac{dw}{dt} \text{ (அல்லது) } \frac{d^2\theta}{dt^2} \text{ (அல்லது) } w \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

அத்தியாயம் 4.

29. தொகையின் பட்டியல் :

(i) $\int x^n\, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

(ii) $\int (ax+b)^n\, dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} + C$

(iii) $\int \cos(ax+b)\, dx = \dfrac{1}{a}\sin(ax+b) + C$

(iv) $\int \cos au\, dx = \dfrac{1}{a}\sin ax + C$

(v) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

(vi) $\int \sin(ax+b)\, dx = -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + C$

(vii) $\int \sin ax\, dx = -\dfrac{1}{a}\cos ax + C$

(viii) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

(ix) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$

(x) $\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + C$

(xi) $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$

(xii) $\int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x + C$

அத்தியாயம் 5.

30. $\int_a^b \phi(x)\, dx = f(b) - f(a)$. இங்கு $f(x)$ ஆனது xஐப் பொறுத்து $\phi(x)$-ன் வரையறுக்காத தொகையாகும்.

31. ஒரு வளைவரையின் கீழுள்ள பரப்பு :

$y = \phi(x)$ என்னும் வளைவரை, X அச்சு, $x = a$-ம், $x = b$-ம் என்னுமிடத்துள்ள நிலைத்தூரங்கள் ஆகியவற்றினால் அடக்கப்பட்டுள்ள பரப்பு

$$\int_a^b \phi(x)\,dx \text{ அல்லது } \int_a^b y\,dx.$$

32. $y = \phi(x)$ என்னும் வளைவரை, x அச்சு, $x = a$, $x = b$ ஆகிய இடங்களிலுள்ள நிலைத்தூரங்கள் என்னும் இவற்றுள் அடங்கிய பரப்பு X அச்சைப் பற்றிச் சுழலுவதால் உருவாகும்

$$\text{திண்மத்தின் கனபரிமாணம்} = \int_a^b \pi y^2\,dx.$$

விடைகள்

பயிற்சி 1.1

1. (i) x எண்ணின் முழுவெண் பாகம் (ii) எண் x உள்ள உந்தியின் நிறம்.

2. (i) $x = \sqrt[3]{y}$ (ii) $x=(y-1)^2$, (iii) $x = \pm\sqrt{y}/5$, (iv) $x = \sin y$

(i)-ம், (ii)-ம் என்னுமிவற்றுள் x-ம் y-ம் ஆகிய விரண்டும் மற்ற மாறியின் ஏக மதிப்புடைய சார்பலன்களாகும். (iii)-ல் y ஆனது x-ன் ஏக மதிப்புடைய சார்பலனுகும், x ஆனது y-ன் இரட்டை மதிப்பையுடைய சார்பலனுகும். (iv)-ல் y ஆனது x-ன் பன்மதிப்புடைய சார்பலனுகும். x ஆனது y-ன் ஏக மதிப்புடைய சார்பலனுகும்.

3. (i) $y = (1 + x) / (3x + 2)$

(ii) $y = \{ 3 \pm \sqrt{9 - 8x}\} / 2$

(iii) $y = \pm 4\sqrt{25 - x^2} / 5$

4. $\sin x$, $\tan x$, $\operatorname{cosec} x$, $\cot x$, $ax^3 + bx$ ஆகியவை x-ன் ஒற்றைச் சார்பலன்களாகும்; $\cos x$, $\sec x$, x^2+1 ஆகியவை x-ன் இரட்டைச் சார்பலன்களாகும்; $x^5+2x^4+3x^3$ ஆகியவை ஒற்றைச் சார்பலனுமன்று, இரட்டைச் சார்பலனுமன்று.

5. sine, cosine, secant, cosecant என்பவற்றின் திருப்பு வட்டம் (Period) 2π ஆரையன்களாகும்; tangent, cotangent களுக்கு π ஆரையன்களாகும்.

6. (i) $u = x^2+x+1$.ம் $y = u^5$-ம் ஆனல், அப்பொழுது y ஒரு சார்புடைச் சார்பலனுகும். (ii) $\phi(x, y) \equiv 7x^2 - 5xy = 9y^2$; $\phi(xy) \equiv (2)xy^2 - 3(xy) + 1$

7. (i) $f(0) = -1$; (ii) $6x - 6 + 3h$

8. (i) $ax^2 - 29x + C$; (ii) $by^2 + 2fy + C$; (iii) C

9. $f(m) + f(n)$; 10. x; 11. $x^3 - 3x^2 + 2x - 5$.

பயிற்சி 1.2

1. (i) 0; (ii) $\frac{2}{3}$; இல்லை; (iii) $\frac{1}{3}$; (iv) 1; (v) 1; $n > 3322000$; இல்லை; (vi) a/b; இல்லை; ∞

2. (i) $\frac{2}{3}$; ஆகும்; (ii) (a) r/n, (b) 0; (c) ∞; (d) q/n; (iii) c/m; (iv) 0; (v) ∞.

3. (i) $-\frac{1}{9}$; (ii) 1.

4. (i) $-\frac{15}{4}$; (ii) 6; (iii) $m\,a^{m-n}/n$ (iv) $\frac{1}{2}$.

5. (i) 1; (ii) 1; (iii) ∞; (iv) 0.

6. (i) m; (ii) $\frac{m}{n}$; (iii) $\frac{a}{b}$; (iv) 1; (v) $\frac{a^2}{b^2}$; (vi) $(b^2 - a^2)/2$; (vii) $\frac{1}{2}$; (viii) 0; (iv) $\frac{1}{8}$; (x) $\frac{1}{2}$; (ix) 0; (xii) 1.

பயிற்சி 2.1

2. $3x^2(4x = 1)$; $3 \sin 6x$; $6x(x-1)$; $-5 \sin 10x$.

3. $x^2(3\cos x - \sin x)$; $2(12x^2 + 4x + 1)$; $2a(ax+b)$; $2x(\sin 2x + x \cos 2x)$; $5 \cos 5x \cos 3x - 3 \sin 3x \sin 5x$ அல்லது $4 \cos 8x + \cos 2x$.

4. $2x(\cos 2x - x \sin 2x)$; $16(4x+3)^3$; $2x(\ x+5)(x+5)^3$ $2 \sin x \cos 3x$.

5. $\cos x - x \sin 2x$; $4(x-2)(x^2 - 4x + 1)$; $5(2x+1)(x^2 + x + 1)^4$.

6. $x^2 \sin x\,(3 \sin x + 2x \cos x)$

7. $3(x+5)(x+3)$; $2 \cos 2x + 9 \sin x \cos^2 x$

8. $x(3x-2)^2(15x-4)$; $3x \sin 6x + \sin^2 3x$; $n \sin mx \cos nx + m \sin nx \cos mx$; $x^2(2x+3)(10x+9)$.

9. $(2x-5)^3(2-5x)$; $-24 \cos^2 2x \sin 2x$; $-18x(1-3x^2)^2$; $2x(x \cos 2x + \sin 2x)$

10. $-2x(1+4x^2)$; $\sin x^2 [2 \cos^2 x - \sin^2 x]$; $x(1-x)^4(2-7x)$; $24 \sin^3 2x \cos 2x$.

11. $x^{m-1}(1-2x)^2[m-2x(m+3)]$; $-30 \cos^4 3x \sin 3x$

12. $(1-x)(1-3x)$; $3(1+x)^2$; $3 \sin 3x [2 \cos^2 3x - \sin^2 3x]$; $-2x(1-2x^2)^2(2+3x^2)$; $\sin^2 2x\,(3x \cos 2x + \sin 2x)$.

13. $-10 \sin 2x$; $x^2(7x^4-5x^2-6)$

14. $-20(2-5x)^3 \cos(2-5x)^4$; $x^2 \cos x [3 \cos x - 2x \sin x]$; $3x^2 + 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4}$; $5 \cos 3x \cos 5x - 3 \sin 3x \sin 5x$.

15. $17/(3x+4)^2$; $2(2x^3 + 21x^2 - 18)(x+7)^2$

16. $x \cos x + \sin x$; $-\sin 2x$.

பயிற்சி 2.2

3. $-x \sin x + 2 \cos x + 6$; 11. $10 + x \cos x + 2 \sin x$.

13. $3(1-9x)$; 15. $6(6x-1)$; 18. $6(24x+5)$;

20. $6(6x+1)$ 22. (i) $10 + 24 \cos 4x\,[\cos 4x \cdot \sin 4x + 2x \cos^2 4x - 4x \sin^2 4x]$

(ii) $-[1/4x^{\frac{3}{2}} + 2/x^3 + 3/4x^{\frac{5}{2}}]$

பயிற்சி 3.1

1. (i) 25; -3; -7; (ii) $\frac{2}{3}$, $12\frac{14}{27}$, $(4, -6)$; (iii) $(3, -2)$ $\left(\frac{5}{3}, 8\frac{14}{27}\right)$; (iv) $x = \frac{7 \pm 2\sqrt{7}}{3}$; (v) $(1, 12)$; $\left(\frac{11}{3}, -\frac{148}{27}\right)$; (vi) $y = 13(x-5)$; $x + 13y = 5$; $25x - y + 19 = 0$; $x + 25y + 151 = 0$.

2. (i) $9x + 16y = 72$, $64x - 36y = 175$.

(ii) $xx_1 + yy_1 = a^2$.

(iii) $xx_1 + yy_1 + g(x+x_1) + f(y+y_1) + c = 0$.

3. (i) $(0, 0)$ என்னுமிடத்தில் செங்குத்து; $\tan\theta = \frac{3}{5}$, $(2, 4)$ என்னுமிடத்தில் (ii) $(0, 0)$ என்னுமிடத்தில் செங்குத்தாக ஊடறுகின்றன; $(4, 4)$ என்னுமிடத்தில் $\tan\theta = \frac{3}{4}$; (iii) இரண்டு வளைவரைகளும் ஆதியிடத்தில் ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன; $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$ என்னுமிடத்தில் $\tan^{-1}\frac{2}{11}$ என்னுங் கோணமுண்டாக ஊடறுக்கின்றன. (iv) ஆதியிடத்தில் செங்குத்தாக வெட்டுகின்றன; $(8, 16), (8, -16)$ என்னுமிடங்களில் $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ கோணமுண்டாக வெட்டுகின்றன; (v) ஆதிக்கண் $\tan^{-1} 2$ கோணமுண்டாகவும், $(4, 8)$ என்னுமிடத்தில் கோணம் $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ உண்டாகவும் வெட்டுகின்றன.

6. $\sqrt{2}$

9. செங்கோட்டடி 1, தொடுகோட்டடி 1.

10. $2x - y + 5 = 0$.

11. $y = x + 3$.

12. $(0, 0)$; $\left(2, -\frac{4}{3}\right)$.

13. $\tan\theta = \frac{3}{4}$ 14. $x - 2y + 5 = 0$

15. $4x + y = a$ 16. $x + 27y - 487 = 0$

17. $\frac{41}{8}$ 18. $1, \frac{\pi}{4}$ 19. $4x + 5y + 6 = 0$

21. $a = 2, b = 3, c = 1$

23. $27y - 43 = 0$; $3x - 1 = 0$; $25y - 41 = 0$; $5x - 3 = 0$

24. $2x + y = 12a$; 25. $\left(\frac{8}{3}, \frac{32}{3}\right), \frac{64}{9}$

பயிற்சி 2·2

1. 2.4 சதுர அங். 2. 3.75 கன அங்; .037625''; .99%. 3. 2π கன அங். 4. (i) .08; (ii) .9996; (iii) 132.332. (iv) .2499375. (v) $\delta y = \frac{1}{3}[4.641\beta]^2$. 5 2%; 3%. 6. 2%; 4%. 7. (a) (i) .4975, (ii) 1.7461; (iii) −.7075. (b) ±.0001. 8. 9.3. 9. .1% 10. $\frac{1}{50}$ அங் அதிகப் பெரிது. 11. (i) $\frac{2C\,ab\sin C}{c^2}$ (C ஆரையன்களால் அளவெய்தும்.) (ii) $2a[a - b\cos C]/C^2$

பயிற்சி 3.3

4. (i) x ஆனது $-\infty$-லிருந்து $\frac{5}{6}$-க்குப் பெருகும் பொழுது குறைவுறுகின்றது. x ஆனது $\frac{5}{6}$-லிருந்து ∞-க்குப் பெருகும் பொழுது y வளருகின்றது. (ii) x ஆனது ∞-லிருந்து 1-க்கு வளரும் பொழுது y பெருகுகின்றது; $1 < x < 2$ பொழுது y குறைகின்றது; $x > 2$ பொழுது y பெருகுகிறது. (iii) $-\infty < x < 0$ பொழுது y குறைகிறது; $0 < x < 2$ பொழுது y பெருகுகின்றது; $2 < x < 7$ பொழுது y குறைகிறது; $x > 7$ பொழுது y பெருகுகிறது.

5. $-\infty < x < -3$ பொழுது சார்பலன் பெருகுகிறது; $-3 < x < 2$ பொழுது சார்பலன் குறைகிறது.

12. $b^2 - ac \leqslant 0$-ம் a மிகை இராசியுமாகும்.

14. $3x^2 + 6x + 6$.

பயிற்சி 3.4

1. (i) $x = 1$, மீப்பெரு 11; $x = 3$; மீச்சிறு -17.

(ii) $\frac{[5 \pm \sqrt{7}]}{3}$

(iii) $x = \frac{8}{5}$ மீப்பெரு; $x = 2$ மீச்சிறு; $x = 1$ மீப்பெரு; மீச்சிறு மதிப்புகள் யாதொன்றுமில்லை.

(iv) $x = 2$ வளைவு மாறும் புள்ளி; $x = \frac{5}{4}$ மீச்சிறு.

(v) $x = a$ மீச்சிறு; $x = b$ மீச்சிறு; $x = \frac{(a+b)}{2}$ மீப்பெரு.

(vi) $x = 0$ வளைவு மாறும் புள்ளி; $x = 1$ மீச்சிறு; $x = -1$ மீப்பெரு.

(vii) $x = 0$ மீப்பெரு $= b$; $x = \frac{\pi}{2}$, மீச்சிறு $= a$.

(viii) மீப்பெரு $+\sqrt{a^2 + b^2}$; மீச்சிறு $-\sqrt{a^2 + b^2}$

(ix) $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ ஆகும்பொழுது மீச்சிறு மதிப்பு; $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ ஆகும்பொழுது மீப்பெருமதிப்பு.

(x) $\theta = \frac{\pi}{4}$ ஆகும்பொழுது மீப்பெரு; $\theta = 3\pi/4$ ஆகும்பொழுது மீச்சிறு மதிப்புகளாகும்.

(xi) $\theta = \frac{\pi}{4}$ மீப்பெரு; $\theta = \frac{\pi}{2}$ மீச்சிறு; $\theta = \frac{3\pi}{4}$ மீப்பெரு.

(xii) எப்பொழுதும் பெருகும் சார்பலனுகி, மீப்பெரு மதிப்போ மீச்சிறு மதிப்போ பெருததாகும்.

(xiii) x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் பெருகும் சார்பலனுகி, மீப்பெரு மதிப்பு, மீச்சிறு மதிப்புகளுள் யாதொன்றும் பெருததாகும்.

3. (i) மீச்சிறு புள்ளி; (ii) கண நிலையான புள்ளியன்றி திரும்பற் புள்ளியாகாது; விளைவு மாற்றப் புள்ளி.

4. (i) $2x^3 + 3x^2/2 - 9x$; (ii) $x^3 - 9x^2 + 15x - 3$.

5. $y = x - 4$

6. நீளம் $2'$; ஒவ்வொரு வகையிலும் சுற்றளவு (girth) $4'$

7. (i) $h = r$; (ii) $h = 2r$

8. (i) $h = r$; (ii) $h = 2r$

9. (i) $h = 4R/3$; $32\pi R^3/81$; (ii) $h = 4R$; $8\pi r^3/3$

10. (i) $2\sqrt{3}\,\dfrac{\pi l^3}{27}$; (ii) $h = \sqrt{2}\,r$

11. (i) $R = \dfrac{2r}{3}$; $H = \dfrac{h}{3}$ (ii) $H = \dfrac{h}{2}$

12. (i) $h = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$; உருளையின் பருமன் = கோளத்தின் பருமன் / $\sqrt{2}$ (ii) $h = \sqrt{2}\,r = \dfrac{4}{3}$ கோளத்தின் ஆரம்.

13. $A = \dfrac{l^2}{h}$ 14. $l = 10''$ $b = 5''$

15. (1) $b = \dfrac{d}{2}$ (ii) $b = \sqrt{3}\,d/3$

17. (i) $d^2/2$; (ii) $A = r^2$; (iii) $l^2/16$

19. $x = 1$; $y = 0$ மீச்சிறு; $x = -1$, $y = 8/3$ மீப்பெரு.

20. $AC = 2''$ 21. $\frac{ah}{4}$ 22. $\frac{1}{2}$

23. ஒவ்வொரு பக்கம் $= 25''$

24. $x = -1$; மீப்பெரு 13; $x = 1$; மீச்சிறு 9.

25. மீப்பெரு 5; மீச்சிறு -5.

26. $2x^2 - 8x + 153$; மீச்சிறு மதிப்புக்கு P ஆனது CD-ன் மையப்புள்ளி.

27. $x = \frac{1}{3}$; மீச்சிறு $6\frac{8}{27}$; $x = -2$; மீப்பெரு 19.

28. $3''$.   30. 110 கெஜம் 70 கெஜம்.

31. $x = 3$; மீச்சிறு; $x = 1$, மீப்பெரு.

32. $x = \frac{3}{2}$, மீப்பெரு $8\frac{1}{4}$.

33. $r = \frac{\sqrt{2}}{\pi}$; $A = 2$;   34. $x = -2$ மீப்பெரு 54; $x = 3$, மீச்சிறு -71.

36. $r = a$; $h = a$.   37. $x = 1$, மீச்சிறு $= 3$; $x = 2$, மீப்பெரு $= 4$; $x = 3$, மீச்சிறு 3.

39. $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$.   41. $\frac{3}{4}$ ச. அடி; 42. $r = 8$; $h = 4$.

பயிற்சி 3.5

1. (i) $\frac{dA}{dr} = Kr$ (ii) $\frac{d\theta}{dt} = K\theta$, K ஒரு மாறிலி.

2. (i) -1.68; (ii) 14.0116; (iii) -1.7

3. $-.00112$ வோல்டுகள் ஒரு 0° C-க்கு

4. $\theta = 45$

7. (i) -12; (ii) 0

8. $\frac{dx}{dt} = -na \sin(nt + \epsilon)$; $\frac{d^2x}{dt^2} = -n^2 a \cos(nt + \epsilon)$

9. கோண வேகம் $t=0$-லிருந்து $t=1.5$-க்குப் பெருகுகிறது; $t=4.37$ செ.

10. $\frac{vd}{AP^2}$; 12. புறப்பாட்டிலிருந்து 5 செகண்டு; 400′; ஒரு செகண்டுக்கு 160′; −160′ ஒரு செகண்டுக்கு; −64, ஒரு செகண்டுக்கு.

13. புறப்பாட்டிலிருந்து $\frac{3}{2}$ செகண்டு; 0ஐ நோக்கி $\frac{3}{2}$ அடி/செகண்டு; 0.

14. 295,60 15. 32, 32.

16. −15′/செகண்டுக்கு; −18′/செகண்டு^{2}-க்கு; $t=0$ ஆகும்பொழுது வேகம் மீப்பெரியதாகும். மீச்சிறு வேகமில்லை;

18. $a=-24$; $b=\frac{1}{2}$.

பயிற்சி 3.6

1. (i) $\frac{44}{13}$ மைல்/மணிக்கு 2. $\frac{1}{18\pi}$ செ. மீ./செகண்டு.

3. $-\frac{8}{3}$ அடி/செ; 4. (i) $56\sqrt{3}$′ செகண்டுக்கு, (ii) $64\sqrt{3}$′செகண்டுக்கு.

5. 12 அடி/செகண்டுக்கு 6. $\frac{8}{5}$ சதுர அங்.

7. $-512/675\pi$ அங்/செகண்டுக்கு

8. (i) $6/25\pi$ (ii) $\sqrt[3]{(2/\pi)/3}$

9. 3.1 மைல்/மணிக்கு; $\frac{6}{5}$ மணிகள்.

10. 30π சதுர அங்/செகண்டுக்கு 11. $3/2\pi$

12. $\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{75}\right)^{\frac{2}{3}}$; $4\left(\frac{\pi}{75}\right)^{\frac{1}{3}}$

பயிற்சி 4.1

ஒவ்வொரு வகையிலும் தொகையின் மாறிலி கொளற்குரித்தாகும்

1. (i) $\frac{(3x-2)^6}{18}$; (ii) $-\frac{(3-4x)^8}{32}$.

(iii) $\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x$; (iv) $3\cos\left(\frac{1}{2}x-2\right)$.

(v) $x^3-\frac{1}{2}\cos 2x$, (vi) $\frac{5a^3(2x^{\frac{3}{2}})}{3}+\frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5}$.

(vii) $-\frac{(4-5x)^4}{20}+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{2x^{\frac{1}{2}}-1}{5}\sin(3-5x)$

$-\frac{1}{x}-2x$

(viii) $\frac{4}{3}\sin(3x-2)-\frac{3}{2}\cos(2x-5)$

(ix) $\frac{180}{\pi}\sin x^{\circ}$ (x) $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x$

(xi) $\left(\frac{\cos 3x}{3}-3\cos x\right)\Big/4$

(xii) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\sin 5x-\sin x\right]$

(xiii) $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\sin 4x+\sin 2x\right]$

(xix) $\frac{1}{4}\left(\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 6x\right)$

(xi) $\frac{1}{8}\left(\frac{\cos 4x}{2}-\cos 2x-\frac{\cos 6x}{3}\right)$

2. (i) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x$ (ii) $\frac{2\sin 3x}{3}$

3. (i) $\frac{(x^3 + 2)}{3}$.

4. (i) $-\frac{41}{3}$, (ii) $y = x - 2x^{\frac{3}{2}}/3 - 4x^{\frac{7}{4}}/7 - 16/21$

(iii) $y = 2x^3 - 3\frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{2}x^6 + 9x - 3$

(iv) $y = K\left(\frac{l^2}{2x} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right)$.

5. $(-x^5 + 22x - 21)/5$

6. பயிற்சி 3.4 கணக்கு 4. (i), (ii) விடைகளைக் காண்க.

7. $x^2 - 5x + 8$. 8. $21\frac{1}{3}$ அடி 9. 36 அடி 10. 8″

11. (i) $(2x+3)^3/6$; (ii) $3 \sin 4x/4$

12. (i) $x^4/4 + x^3/3 - x^2/2 - x$; (iii) $-4 \cos x + x/2)$.

13. $x^3/3 - x^2/2 - 6x$.

14. (i) $(x+2)^3/3$; (ii) $-3 \cos x/3$.

15. (i) $x^3/3 + 3x^2/2 + 5x$; (ii) $-\frac{1}{2} \cos 2x$.

16. (i) $(5x+6)^3/5$; (ii) $\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin 2x)$.

17. (i) $\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 5x/5)$; (ii) $x^3/3 - x^2/2 - 2x$.

18. (i) $\frac{1}{2}(2x-7)^7/7$; (ii) $-\frac{1}{2}\cos(2x+3) - \sin 3x/3$.

19. (i) $10x^4/4 + 9x^5 + 19x^2 + 27x$; (ii) $\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin 2x)$.

20. (i) $(5x - 8'')/55$; (ii) $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin 2x)$.

21. (i) $2x^5/5 - 3x^4/4$; (ii) $-2\cos 3x/3 - 7\sin 2x/2$.

22. $y = x^3/3 + 1$.

23. (a) (i) $x^3/3 + x^2/2$; (ii) $\sin 3x/3 - \cos 2x/2$.

(b) $y = x - 2x^3/3 + 1$.

24. (*a*) (i) $\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C$; (ii) $\sin 3x - \cos 2x$;

(*b*) $x^2 - x^3/6 + 1 = y$.

25. (i) $-\frac{(1-2x^3)}{6}$; (ii) $\frac{1}{2}\sin 2x - \cos 3x$.

26. (i) $\frac{(x-1)^4}{4}$; (ii) $-(\cos 3x + 2\sin 2x)$.

27. (a) (i) $-(1-3x)^6/18$; (ii) $3\sin 2x/2 - \cos 5x$

(b) $y = x^3 - x^2 + 5x - 9$.

28. (i) $\frac{x^6}{3} - \frac{3x^5}{5} = \frac{7x^4}{4} - \frac{19x^3}{3} + 50x^2 + 97x$;

(ii) $-(\cos 2x + \frac{5}{2}\sin 7x)$.

29. (i) $2x - 7x^2/2 + 8x^3/3 - 3x^4/4$;

(ii) $\frac{1}{2}(x - \sin 6x/6)$.

30. (i) $27x - 54x^2 + 75x^3 - 97x^4 + 432x^5/5 - 32x^6$;

(ii) $\frac{1}{2}(\cos x - \cos 5x/4)$.

31. $\sin 3x/3 - (1-x)\ 4/4$.

32. $\frac{1}{4}\left(\frac{\sin 3x}{3} + 3\sin x\right)$;

33. $\frac{8x^7}{7} + \frac{36x^5}{5} + 18x^3 + 27x$.

பயிற்சி 4.2

ஒவ்வொரு வகையிலும் தொகையின் மாறிலியைக் கருதிக் கொள்க.

1. $\frac{1}{3}\cos^7 x/7 - 3\cos^5 x/5 + \cos^3 x - \cos x)$.

2. $(3x^2 - 5)^9/54$ 3. $(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}/3$

4. $(2x^2 - 3x + 4)^3/2$ 5. $-\frac{1}{3}(1 + x^3)$

6. $2(ax+2b)/a^2\sqrt{(ax+b)}$. 7. $[\sin^{-1}x-\sqrt{(1-4x^2)}]/2$

8. $-\sqrt{(a^2-x^2)}$ 9. $a^2\left[\sin^{-1}\frac{x}{a}-\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}\right]/2$

10. $-\sqrt{1-x^2}\,(2+x^2)/3$ 11. $\frac{1}{3}(x^2+2x+3)^{\frac{3}{2}}$

12. $\sin 4x/4$ 13. $-\cos^4 x/4$

14. $(5\sin^3 x-3\sin^5 x)/15$ 15. $(\cos 4x-4\cos 2x)/16$

16. $\theta/2-\cos^2 2\theta+\cos^3 2\theta/3$ 17. $\frac{1}{4}(\cos 3x/3-3\cos x)$

18. $(\sin 3x/3+3\sin x)/4$ 19. $(3\tan\theta+\tan^3\theta)/3$

20. $\sin x^3/3$ 21. $(ax^3+b)^4/12a$.

பயிற்சி 5.1

1. 0 2. $13/3$ 3. $70/3$ 4. $\pi a^2/4$

6. $a^3/3$ 7. $3/2$ 8. $\pi/4$ 9. 2

10. $\frac{1}{2}$ 11. 1 12. $\pi/4$; $\frac{1}{2}$

13. $\pi/4$ 14. $2/3$ 15. $\frac{1}{3}$ 16. $\frac{1}{4}$

17. $[(\pi-3)^3+33]/16$.

பயிற்சி 5.2

1. (i) $\frac{8}{9}$; (ii) 6; (iii) $\frac{31}{3}$.

2. (ii) $\frac{8}{9}$; (ii) 6; (iii) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

3. (i) $\frac{1}{12}$; (ii) $\frac{5}{12}$; (iii) $\frac{1}{3}$.

4. (i) $-10\frac{2}{3}$; (ii) $\frac{125}{6}$; (iii) $\frac{3}{4}$.

5. $\frac{(2\sqrt{2}-1)}{6}$ 6. $\frac{7}{2}$ 7. (i) 6;

(ii) $\frac{(2\pi+3\sqrt{3}-6)}{6}$; (iii) 1;

(iv) $\sqrt{2}$; (v) 2.

8. a^2 9. $\frac{8}{3}$ 10. $\frac{33}{4}$ 11. $\frac{4}{3}$

12. ஒவ்வொன்றும் $= \frac{1}{4}$; 13. $6\frac{3}{4}$ 14. $\frac{3}{15}$

15. (i) $+1\frac{3}{4}$; (ii) $-1\frac{3}{4}$; (iii) 0.

17. $10\frac{2}{3}$ சதுர அலகுகள், $x = 0, 4$

18. 2 சதுர அலகுகள் 19. 90 சதுர அலகுகள்

20. $\frac{39}{36}$ சதுர அலகுகள் 21. 8π

22. $\frac{26}{6}$ சதுர அலகுகள் 23. $\frac{1}{6}$ சதுர அலகுகள்

24. $\frac{1}{12}$ 25. $266\frac{2}{3}$.

பயிற்சி 5.2

1. $\frac{7\pi}{4}$; (ii) $\frac{13\pi}{2}$; 2. $\frac{740\pi}{5}$.

3. 6π; 16π 4. $\frac{2\pi}{3}$ 5. (i) 45π;

(ii) $\frac{89\pi}{3}$. 6. $\pi h^2\left(\frac{r-h}{3}\right)$ 7. $\frac{\pi^2}{2}$

8. $\frac{75\pi}{2}$ 9. $\frac{4\pi a^3}{3}$ 10. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

11. 18π 12. $\frac{243}{2}$ 13. $\frac{36\pi r^3}{125}$

14. $\frac{2\pi^2}{3}$ 15. 8π 16. $3\pi^2$

கணை இயற்கணிதம்

(SET ALGEBRA)

1. கணக்கொள்கை

(The Set Theory)

1.1 முன்னுரை

எண் கணிதப் பிரச்சினைகளை $a, b, c, \ldots x, y, z$ என்னும் எழுத்துகளைக் கொண்டு சுருக்கமாக எழுதவும், தீர்க்கவும், சாதாரண இயற்கணிதம் பயன்படுகிறது. $+, -, <, =$ முதலிய பிணைகள், உறவுகள் இவற்றைப்பொறுத்து எண்களிடையே ஏற்படும் அமைப்பை முதலிற் பயில்வதுபோல, எண்கள் தாமின்றி வேறு விளக்கப்படாத உறுப்புகள் இடையிலும் இத்தகைய பிணைகளும், உறவுகளும் சில ஆதாரத் தத்துவங்கட்கு உட்பட்டு இருப்பின் அவற்றின் பலவிதச் சேர்க்கைகள் யாவை, அவற்றைப் பற்றி எத்தகைய தேற்றங்கள் நிறுவலாம் என்று காண்பதே நவீன இயற்கணிதத்தின் (Modern Algebra) நோக்கமாகும்.

இத்தகைய நவீன இயற்கணிதத் துறையின் பல்வேறு கிளைகளுக்கும் அடிப்படையாக விளங்குவது 'கணம்' என்னும் கருத்தாகும்.

ஜார்ஜ் காண்டர் (George Cantor) என்னும் கணிதப் பேராசிரியர்தாம் கணக்கொள்கையைத் தோற்றுவித்தவராவார்.

கணக்கருத்து நமக்கு அறிமுகமான தொன்றேயாகும்.

ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்கள் ஒரு கணமாக அமைகின்றனர்.

1.2 கணம் (Set)

கீழே கொடுக்கப்பட்ட தொகுதிகளைக் கவனிக்கவும்:

(i) 1, 2, 5, 9, 10 எனும் எண்கள்

(ii) 1, 3, 5, 7, 9, ... எனும் ஒற்றைப்படை எண்கள்

(iii) 5 ஆல் வகுபடும் முழு எண்கள்

(iv) $x^2 - x - 6 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள்

(v) 3 ஐவிடப் பெரிய முழு எண்கள்

(vi) இந்திய நாட்டின் மாநிலங்களின் தலைநகரங்கள்

(vii) தமிழ் உயிர் எழுத்துகள்

(viii) a, e, i, o, u

(ix) முருகன், இராமன், கோபாலன், கந்தன், குமரன்

மேற்கூறியவை எல்லாம் கணக்கருத்தை விளக்குதற்குச் சான்ற உதாரணங்களாகும்.

கணம் வரையறை : ஒரு கணமென்பது நன்கு விவரணப்பட்டதொரு தொகுதியையோ அல்லது இனத்தையோ குறிக்கும்.

எல்லாத் தொகுதிகளும் கணங்களாகா. ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளானது ஒரு தொகுதியைச் சேர்ந்ததா சேராததா என்பதனை எளிதாக நாம் காணக் கூடுமானால்தான், அத்தொகுதியைக் கணமென்று கூறலாம்.

இவ்வாறாக ஒரு கலாசாலையின் நூல் நிலையத்திலுள்ள நூல்களின் தொகுதி ஒரு கணமாக அமையும்.

ஆனால் 'உலகத்தின் மூன்று சிறந்த திரைப்பட நடிகர்கள்' ஒரு கணமாகக் கருதப்படார். ஏனெனில் இம்மூவரைத் தேர்ந்தெடுக்கும் வகையில், இரசிகத் தன்மையில் வேறுபடுதலானும், மக்கள் யாவருக்கும் ஒப்ப உடன்பாடெய்தல் இயலாதாகலானும், அந் நடிகர்கள் ஒரு கணமெனக் கொள்ளப்படார்.

1.3 கணத்தின் உறுப்புகள் (Elements of a set)

ஒரு கணமாக அமையும் தனித்தனிப் பொருள்களும் அக் கணத்தின் உறுப்புகள் அல்லது கண மூலங்கள் (Elements of a set) எனப்படும்.

ஒவ்வொரு பொருளும், ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தின் உறுப்பாகவோ அன்றாகவோ இருக்கும்.

உதாரணமாக, '$\frac{1}{2}$-க்கும் $9\frac{3}{4}$-க்கும் இடையிலுள்ள முழு எண் தொகுதியை நோக்குவோம்.'

இவ் வகையில் 4 என்பது கணத்தின் ஓர் உறுப்பாகும்.

ஆனால் 10 அவ்வாறாகாது.

1.4 முடிவுறு கணங்களும், முடிவுறாக் கணங்களும் (Finite and Infinite Sets)

கணங்களானவை முடிவான எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகளையோ, முடிவுறா எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகளையோ பெற்றிருக்கலாம்.

(உ - ம்) $\frac{1}{2}$-க்கும் $9\frac{3}{4}$-க்கும் இடையிலுள்ள முழு எண் தொகுதி ஒரு முடிவுள்ள கணமாகும். ஆனால் (i) ஒரு நேர்க் கோட்டிலுள்ள புள்ளிகள், (ii) விகிதமுறு (Rational) எண்கள், ஆகியவை முடிவுறாத கணங்களாகும்.

பயிற்சி

பிரிவு 1.2-ல் கொடுக்கப்பட்ட உதாரணங்களில் முடிவுறாத கணங்கள் யாவை ?

1.5. குறியீடுகள் : (Notations)

கணங்களை $A, B, C,$ ...என்பது போன்ற பெரிய எழுத்துகளாலும், உறுப்புகளை $a, b, c, \ldots\ldots x, y$ என்பன போன்ற சிறிய எழுத்துகளாலும் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

'a' என்பது A என்னும் கணத்தின் உறுப்பாகுமானால்,

$a \in A$ என்றெழுதுகிறோம்.

இக்குறியீட்டை, 'a என்பது A-ன் உறுப்பாகும்' அல்லது 'a என்பது கணம் Aஐச் சேர்ந்தது' என்று படிக்கின்றோம்.

மற்றப்படியாக, a ஆனது A-ன் உறுப்பன்றாயின்,

$a \notin A$ என்றெழுதுகின்றோம்.

உ - ம். '$\frac{1}{2}$-க்கும் $9\frac{3}{4}$-க்கும் இடையிலுள்ள முழு எண் தொகுதி' என்ற கணத்தில்,

$4 \in A$ ஆகும்.

ஆனால், $10 \notin A$ ஆகும்.

1.6. ஒரு கணத்தின் விவரணம் (Definition of a Set)

ஒரு கணத்தை விவரிப்பதற்குரிய மிகவும் சாதாரண முறைகள் ரோஸ்டர் (அல்லது) அட்டவணை முறை யென்றும், சட்ட (அல்லது) தன்மை விவரண முறையென்றும் இருவகைப்படும்.

ரோஸ்டர் அல்லது அட்டவணை முறை :

(i) இம்முறையில் நாம் ஒரு கணத்தைச் சேர்ந்த வுறுப்புகளை யெல்லாம் எடுத்துக்காட்டி அவற்றை ஓர் அடைப்பினுள் அமைக்கிறோம். இங்ஙனம் அடைவுறும் உறுப்புகளைக் கால் புள்ளிகளை யிட்டுப் பிரித்துக் காட்டுகிறோம்.

A என்பதொரு கணத்திற்கு 1, 3, 5, 7 என்னும் உறுப்புக ளிருந்தால் $A = (1, 3, 5, 7)$ என்றெழுதுகின்றோம். ஆனால், அடைப்பினுள் கிடக்கும் உறுப்புகள் முறைப்பட இருக்கவேண்டு மென்னும் அவசியமில்லை. ஆதலின், Aஐ (5, 3, 7, 1) அல்லது (7, 1, 5, 3) என்றும் எழுதலாம். இங்கு ஓருறுப்பினை ஒரு முறைதான் குறிப்பிடலாம் என்பது நோக்கத்தக்கதாகும். ஆகவே, (a, b, c, a, a, b, d) என்னுங் கணமானது $(a, b, c, d,)$ என்னுங் கணமேதான் என அறியவேண்டும்

ஒரு கணமானது முடிவுறுக எண்களைப் பெற்றிருந்தால், அவற்றுள் சிலவற்றை மட்டும் குறிப்பிட்டு, ஏனையவற்றைப் புள்ளிகளையிட்டுத் தொடர்புகாட்டி விட்டுவிடலாம்.

உதாரணமாக, எல்லாத் தொடரெண்களையும் அடக்கிக் கொண்டு நிற்கும் B என்னுமொரு கணத்தை

$B = (1, 2, 3, 4, \ldots\ldots)$ என்று வரையலாகும்.

(ii) சட்ட முறை (Rule Method)

இங்கு ஒரு கணத்தை விவரணஞ் செய்யும் சொற்றொடரை அடைப்பினுள் அமைக்கிறோம். (அதாவது) கணத்தின் பொதுப் பண்பைக் கூறிக் கணத்தை எழுதுகிறோம். அங்ஙனம் விவரணத் திற்கு உட்படும் பொருள்களே உறுப்புகளாக ஏற்கப்படும். ஏனையவை ஏற்கப்படா.

உதாரணமாக,

கணம் $V = \{x/x\}$ ஆங்கில எழுத்துகளுள் ஓர் உயிர் எழுத்தாகும். அல்லது $V = [a, e, i, o, u]$ என்பதாகும்.

நெடுங் கோட்டை 'அப்படியாகும்' (such that) என்று படிக்க வேண்டும். நெடுங் கோட்டுக்குப் பதிலாக : இரட்டைப் புள்ளி களையும் குறியீடாகக் கொள்ளலாம்.

இதேபோலக் கணம் $A = \{x : x$ 7-க்குக் குறைந்த மிகை இராசி முழு எண்$\}$

என்பது, கணம் $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ஆகும்.

குறிப்பு : மேற் கூறிய இரு முறைகளுள் ஒவ்வொன்றும் சில சிறப்புகளும் குறைகளும், உடையனவாய்க் காணப்படுகின்றன.

உதாரணமாக,

$N = \{x/x$ என்பது 1-க்கும் 2-க்கும் இடைப்பட்ட ஒரு மிகை இராசிப் பின்னமாகும்.$\}$

என்னும் கணத்தை அட்டவணை முறையில் எழுத முடியாது.

மற்றப்படியாக,

கணம் $A = \{$சென்னை, செங்கல்பட்டு, தஞ்சை, திருச்சி$\}$ என்றதற்குச் சட்டமுறையாகக் (rule method) கையாள முடியாது.

மிகை இராசி முழு எண்களின் தொகுதியை நோக்குக. அது அளவிறந்த எண்களைப் பெற்றிருக்கின்றது. இவ்வகையில் இதைக் குறிக்கச் சட்ட முறையானது மிகவும் சிறந்தது.

$$S = \left\{ \frac{a}{a} \text{ ஒரு மிகை இராசி முழு எண்.} \right\}$$

1.7. பூச்சியக் கணம் (Null Set)

யாதோருறுப்பும் பெறமாட்டாதொரு கணம் பூச்சியக்கண மெனப்பட்டு ϕ என்னுங் குறியீட்டால் காட்டப்படும். இங்கு அடைப்புகளைப் புகுத்த வேண்டுவதில்லை.

உதாரணங்கள் :

(i) முழு வர்க்கங்களாகி 7-ஆல் முடிவுறும் முழு வெண்கள் ϕ ஆகும்.

(ii) $S = \{x/x^2 = 9$-ம் $3x=5$-ம்$\}$ என்னும் கணத்தை நோக்குக. குறிப்பிட்ட இருவகை நிபந்தனைகளையும் நிறைவு செய்வதோர் உறுப்பின்மையான், மேற்கூறியது ஒரு பூச்சியக் கணமாகும்.

குறிப்பு : பூச்சியத்தை மட்டும் உறுப்பாகக் கொண்டதொரு கணத்தை அதாவது $\{0\}$ ஐக் கருதுவோம்.

ϕ ஆனது யாதோருறுப்பையும் பெருததாக இருக்கின்றது. ஆனல் $\{0\}$ என்பது ஓருறுப்பைக் கொண்டுள்ளது.

குறிப்பு : காலியான பெட்டிக்கும், பெட்டியே இல்லாமைக்கும் உள்ள வேறுபாட்டைக் கவனிக்கவும்.

1.8. தனிநிலே கணம் (Singelton)

ஒரேவொரு உறுப்பை மட்டும் பெற்றுள்ள கணமானது தனி நிலே (Singleton) எனப்படும். இதுபற்றி $\{0\}$ என்னுங் கணம் ஒரு தனிநிலேயாகும்.

தீர்வுக் கணமாகிய $2x+1=6$ ஆனது $\{2{\cdot}5\}$ ஆகி, ஓருறுப்பேயுடையதாகும்,

1.9. கணக் குடும்பம் (Family of Sets)

ஒரு கணத்திற்கு அங்கமாகியதோர் உள்கணங்கள் தாமும் தனித்தனிக் கணங்களாக விளங்குமாளுல், அக்கணமானது கணக் குடும்பமெனப்படும். $x+y=7$ என்னும் சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வுகளாகும் மூலங்களாகுமவை $(1, 6)$; $(2, 5)$; $(3, 4)$; $(4, 3)$; $(5, 2)$; $(6, 1)$ என்பனவாகும்.

1.10 சம கணங்கள் (Equal Sets)

A, B என்பன சமகணங்களாகுமாயின் A-யிலுள்ள ஒவ்வோருறுப்பும் B-யிலும், B-யிலுள்ள ஒவ்வோருறுப்பும் A-யிலும் காணப்படல் வேண்டும்.

A, B என்னுமிரண்டுஞ் சமகணங்களானல் $A=B$ என வெழுதுகின்ருேம். அவ்வாருகாவிடத்து $A \pm B$ என்று வரைகின்ருேம். (உ-ம்) $(1, 0, 4, 7, 9)$-ம் $(7, 0, 9, 1, 4)$-ம் சம கணங்களாகும்.

1.11 சமனெத்த அல்லது ஒப்புடைக் கணங்கள் (Equivalent Sets)

இரு கணங்கள் தமக்குள் ஒத்த எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகளைப் பெற்றிருந்தால், ஒப்புடைக் கணங்களெனப்படும். (a, e, i, o, u)-ம், $(1, 5, 3, 13, 11)$-ம் அங்ஙனம் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையாலொத்தனவாகும்.

அத்தகைய நிலையில், ஒரு கணத்திற்கு உரிய உறுப்புகளை மற்றொன்றற்குரிய உறுப்புகளோடு ஒன்றற்கு ஒன்றென ஒப்புற நிறுத்தலாம்.

1.12 உட்கணம் (Sub Set)

சில கணங்கள் தம்மினும் பெரிய கணங்களுள்ளே அடங்கிக் கிடக்கவும் பெறும்.

$A = (1, 2, 3, 4, 5)$; $B = (1, 3, 4)$ என்னுங் கணங்களை நோக்குங்கால், B கணமானது A கணத்துள் அடங்கியிருக்கக் காணலாம். ஆதலின் B ஆனது A-ன் உட்கணமாகும்.

விவரணம் : B-ன் ஒவ்வோருறுப்பும் A-ன் உறுப்பு மாகில் B ஆனது A-யின் உட்கணமெனப்படும். இதனை $B \subseteq A$ என வெழுதி, 'B-யானது A-ன் உட்கணம்'' என்றோ, அல்லது 'கணம் B ஆனது கணம் A-யுள் அடங்கியுள்ளது' என்றோ படிக்கின்றோம்.

$B \subseteq A$ என எழுதுவது, A-ம் B-ம் ஒத்திருத்தலையும் அனுமதிப்பதாகும்.

குறிப்பு (i) : உட்கணத்தைக் குறித்த இந்த விவரணப்படி, A ஆகிய ஒவ்வொரு கணத்திற்கும்

(i) $A \subseteq A$ உண்மையாகுமென்றும், அது பற்றி ஒவ்வொரு கணமும் தனக்குத்தானே உட்கணமாகுமென்றும்,

(ii) ϕ என்னும் பூச்சியக் கணம் ஒவ்வொரு கணத்திற்கும் உட்கணமாகுமென்றும்,

(iii) $A \subseteq B$-ம் $B \subseteq C$-ம் ஆனால், அப்பொழுது $A \subseteq C$ ஆகுமென்றும் கொள்ளப்படும்.

1.13 பெருங்கணம் (Super Set)

B ஆனது A-ன் உட்கணமானால், A ஆனது B-ன் பெருங் கணம் (Super set) எனக் கூறப்படுமென்றும் கொள்ளுதல் ஏற்புடைத்தாகும். இதை $A \supset B$ என எழுதுகிறோம்.

B என்னும் கணம் A-ன் உட்கணம் அல்ல என்பதை $B \not\subseteq A$ எனவும், A என்னும் கணம் Bஐத் தன்னுள் கொண்டதல்ல என்பதை $A \not\supset B$ எனவும் எழுதுகிறோம்.

1.14 சரியான அல்லது தக்க உட்கணம்

B ஆனது A-ன் உட்கணமாகும்பொழுது, A-க்குரிய உறுப்புகளுள் ஒருறுப்பாவது B-ல் இடம் பெருதிருந்தால், அப்பொழுது B ஆனது A-ன் தக்க உட்கணமெனப்படும்.

இவ் வகையில் $B \subset A$ என்றெழுதுகின்ரேம். $B \subset A$ என்ருல், $B \subseteq A$ என்றும், $B \neq A$ என்றும் பொருள்படும்.

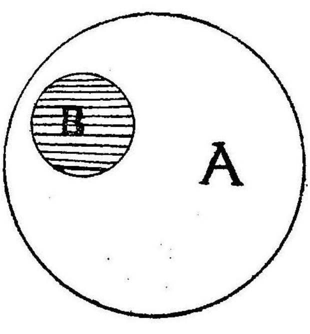
1.15 அடுக்குக் கணம் (Power Set)

S என்னும் கணத்திற்கு உரிய எல்லா உட்கணங்களாலும் அமைவுறுவதொரு கணமானது S-ன் அடுக்குக் கணமெனப்படும்.

$S = \{1, 2, 3\}$ ஆனுல், அப்பொழுது கணம் $[\{\phi\}; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1, 2\} \{1, 3\} \{2, 3\}; \{1, 2, 3,\}]$ ஆவது S-ன் அடுக்குக் கணமெனப்பட்டு P என்னும் குறியால் உணர்த்தப்படும்.

2.1. வென்ன் படங்கள் (Venn Diagrams)

ஜான் வென்ன் (1834 – 1883) என்னும் ஆங்கிலத் தருக்கப் பேராசிரியர் அருவமான (abstract) கருத்துகளை விளக்கப் படங்களைப் பயன்படுத்திஞர். அவர் கணங்களுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்புகளைப் பட விளக்கங்களால் புலப்படுத்திஞர். அத்தகைய பட விளக்கங்கள் 'வென்ன் படங்கள்' எனப்படும். அவை முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள கணங்களைச் சார்ந்த கணக்குகளுக்கு உதவி செய்கின்றன.



படம் 20.

படம் 20 ஆனது தக்க உட்கணத்தைப் பற்றிய கருத்தை விளக்கும் வென்ன் படமாகும். அதாவது $B \subset A$ கணங்களிடையே

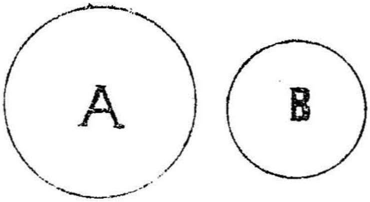
உள்ள தொடர்புகளைக் காட்ட அவற்றை வட்டப் பரப்பால் குறிக்கிறோம்.

இங்கு $B \subset A$ என்பதைத் தெளிவு படுத்தப் பெரிய வட்டத்தால் A ஐயும், அதற்குள் அடங்கிய சிறிய வட்டத்தால் B ஐயும் குறிக்கிறோம்.

2.2 சேரா அல்லது ஒட்டாக்கணங்கள் (Disjoint-Sets)

இரண்டு கணங்களுள்ளே ஒரு கணமானது மற்றொன்றன் உட்கணமானால் அவை யொன்றற்கொன்று ஒப்பிடு கணங்களாகும் (comparable sets).

A, B என்னும் இரண்டு கணங்களும் தம்மிடையே பொது வான உறுப்புகளைப் பெறுவிட்டால், அப்பொழுது அவை ஒட்டா அல்லது சேராக் கணங்கள் எனப்படும்.



படம் 21.

உதாரணமாக, $A = (-2, 5, -1, 2)$-ம் $B = (0, 3\ 1,$ சேராக் கணங்களாகும். இக் கருத்தை விளக்கும் வென்ன் படம் படம் 21-ல் காட்டப்பட்டுள்ளது. இங்கு A-ம், B-ம் வெட்டாத இரு வட்டங்களால் காட்டப்பட்டுள்ளன.

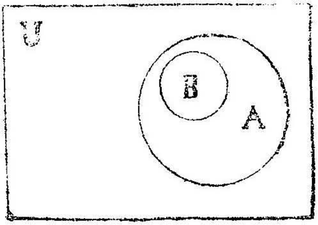
2.3 அகில கணம் அல்லது இனமுழுக்கணம் (Universal Set)

ஆராய்தற் கெடுத்துகொண்ட எல்லாக் கணங்களிலுமுள்ள உறுப்புகளனைத்தையும் உட்கொண்டு நிற்பது இனமுழுக்கணம் எனப்படும்.

சில குறிப்பிட்ட ஆய்வுகளிலே கருதியெடுத்துக்கொண்ட கணங்களெல்லாம் A என்னும் ஒரே கணத்தின் உட்கணங்களாக நேருவதுமுண்டு. அப்பொழுது A ஆனது இனமுழுக்கணம் அல்லது அகில கணம் எனப்படும். அது பொதுவாக $\cup$ எனக் குறிப்பிடப்படலாம்.

உதாரணமாக, ஒரு கல்லூரியிலுள்ள அனைத்து மாணவர்களையும் ஆராயுங்கால், புகுமுக வகுப்பு மாணவர்கள், பட்டப் படிப்பு மாணவர்கள், கணிதம் பயிலும் மாணவர்கள், மாணவிகள் எனத் தனித்தனியே இனம்படுத்தப்படுவோரெல்லாம் தனித்தனி யுட்கணங்களாக விளங்கினாலும், அக் கணங்களையெல்லாம் உள்ளடக்கி நிற்கும் "கல்லூரியின் அனைத்து மாணவர் தொகுதி" ஓர் இனமுழுக்கணமாகும்.

வெவ்வேறு பிரச்சினைகளில் அகில கணமும் வெவ்வேறாகும். அவை முழுவெண்களாகிய கணமாகவோ, விகிதமுறவெண்களின் கணமாகவோ, நிசவெண்களின் கணமாகவோ இருக்கலாம். பொதுவாக ஓர் அகில கணமானது செவ்வகத்தின் உருவத்தால் குறிக்கப்படும்.



படம் 22.

U = (மாணவர்கள்)

A = (ஆண் மாணவர்கள்)

B = (பட்ட வகுப்பின் ஆண் மாணவர்கள்)

என்றால் இக்கருத்தை விளக்கும் வென்ன் பட விளக்கம் படம் 22-ல் காட்டியபடியாகும்.

2.4 நிரப்புக்கணம் (Complement of a Set)

விவரணம் : வெளிப்படக்கிளக்கப்பட்டதோ அல்லது மனத்தில் குறிக்கொளப்பட்டதோ வாகிய தொரு அகிலத்தைப் பொறுத்து A என்னும் யாதொரு கணத்தின் நிரப்புக் கணமாவது A-க்கு உட்படாத அகில கணவுறுப்புகளைப் பெற்றிருக்குங் கணமாகும்.

U என்பது அகில கணமும், A என்பது அதன் உட்கணமுமானால், V-யிலுள்ள எஞ்சியவுறுப்புகள் அதாவது U-வுக்கு உரியவாகியும் A-யினுள் அடங்காத உறுப்புகளாகிய உட்கணமானது A-ன் நிரப்புக்கணமெனப்படும். இது A' எனக் குறிக்கப்படும்.

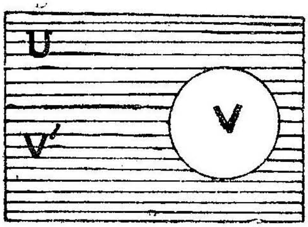
A-ம் A'-ம் ஒன்றற்கொன்று நிரப்புக்கணமானால், அவை யிரண்டும் $\cup$-க்கு உட்கணங்களாயினவேனும், ஒட்டாக் கணங் களாகவுமிருக்கும்.

$\cup = \{x \mid x$ ஆனது ஆங்கிலவெழுத்துகள் $\}$ -ம்

$V = \{x \mid x$ ஆனது ஒருயிரெழுத்து $\}$ -ம்

ஆனால் $V' = \{x \mid x$ ஆனது ஒரு மெய்யெழுத்து$\}$ -ம் ஆகும்.

படம் 23. ஆங்கில மொழியிலுள்ள எல்லா வெழுத்துகள் இன முழுமையுங்காட்டும். V ஆனது உயிரெழுத்துகளாகிய கணத் தைக் காட்டும். V' ஆனது அதன் நிரப்புக் கணமாய் மெய் யெழுத்துகளாகிய கணத்தைக் காட்டும்.

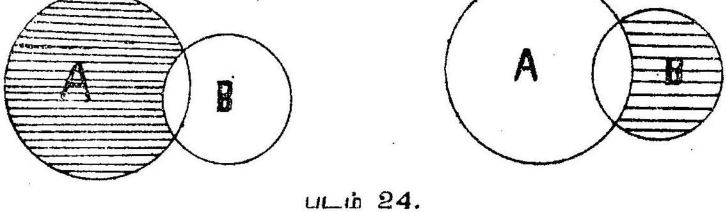


படம் 23.

குறிப்பு : $\cup' = \phi$; $\phi' = \cup$.

2·5. இரண்டு கணங்களின் வித்தியாசம்

AB என்பது B-யினுள் படாமல் A-ல் மட்டும் அடங்கியுள்ள எல்லா உறுப்புகளாகிய கணமாகும்.



படம் 24.

$A = (1, 7, 3, 5, 6)$ என்றும், $B = (3, 7, 9, 8)$ என்றும் கருதுவோம்.

அப்பொழுது $A-B = (1, 5, 6)$-ம்

$B-A = (9, 8)$-ம் ஆகும்.

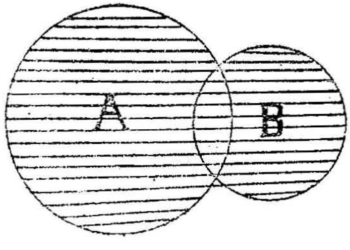
குறிப்பு : $A-\phi = A$; $A-A = \phi$

இரண்டு கணங்களின் வித்தியாசத்தை விளக்கும் வென்ன் படம், படம் 24-ல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

2.6. கணங்களின் ஒன்றியம் அல்லது சேர்க்கை : கணக்கூடுதல் (Union of Sets)

A, B என்னும் இரண்டு கணங்களின் ஒன்றியமாவது A-க்குரிய எல்லா உறுப்புகளுமோ அல்லது B-க்குச் சேர்ந்த எல்லா உறுப்புகளுமோ அல்லது அவ்விரண்டனுக்கும் சேர்ந்த உறுப்புகளுமோ கொண்ட கணமாகும்; அதாவது இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட கணங்களின் ஒன்றியமாவது, ஆதியிலுள்ள கணங்களில் குறைந்த பக்கம் ஒரு கணத்திலாவது உள்ள உறுப்புகளாகிய ஒரு கணமாகும்.

கணங்களின் ஒன்றியத்தில் ஆதிக்கணங்களுள் ஒன்றனுக்கு மேற்பட்ட கணங்களிலுள்ளதோர் உறுப்பானது ஒன்றியத்தில் ஒரு முறைதான் குறிக் கொளப்படும்.



படம் 25.

A, B என்னுமிரு கணங்களின் ஒன்றியம் $A \cup B$ எனக் குறிக்கப்பட்டு 'A ஒன்றியம் B' என்று படிக்கப்படும்.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ அல்லது } x \in B\}$$

என வரைகிறோம். அல்லது,

(i) இரண்டு கணங்களின் ஒன்றியம் பற்றிய விவரணப்படி $A \cup B$-ம் $B \cup A$-ம் ஒரே கணமாகும்.

$$\therefore \quad A \cup B = B \cup A$$

ஆகவே 'கணக் கூடுதல்' பரிமாற்று விதி (Commutative law)-க்கு அடங்கியது எனத் தெளிவாகிறது. அதனுல் எந்த வரிசை முறையில் கணங்கள் கூறப்படுகின்றனவென்பது முக்கியமல்ல.

(ii) கணம் A யாதேயாயினும், $A \cup \theta = A$

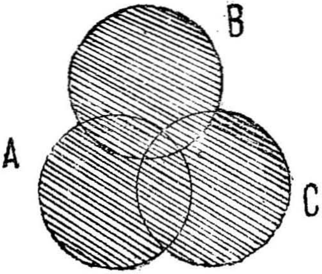
(iii) A-ன் உறுப்புகள் $A \cup B$-ல் உளவாதலின், A-ஆனது $A \cup B$-ன் உட்கணமாகும். அதாவது,

$$A \subset (A \cup B)$$

அதைப்போலவே $B \subset (A \cup B)$.

உதாரணம்: $A = (1, 3, 5)$-ம்; $B = (0, 2, 3, 5, 7)$-ம் ஆனுல், $A \cup B = (0, 1, 2, 3, 5, 7)$ ஆகும்.

இவ்வாருக இரு கணங்களுக்கு ஒன்றியம் காணுங்கால் அவற்றிற்குரிய எல்லா வுறுப்புகளையும், யாதொன்றும் இருமுடியாக வராதபடி விலக்கி, அமைக்கவேண்டும்.



படம் 26.

(iv) A, B, C ஆகிய மூன்று கணங்களின் ஒன்றியம் $A \cup B \cup C$ என்று எழுதப்படும்.

மேலும் $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ என்பதையும் வென்ன் படத்தால் காணலாம். சேர்க்கை விதிக்கும் (Associative law) இதனுல் கணக்கூடுதல் உட்பட்டது எனத் தெளிவாகிறது.

2.7 கணங்களின் இடைவெட்டு அல்லது ஊடறுப்பு (Intersection of Sets)

இரு கணங்களின் ஊடறுப்பாவது A-யிலும் B-யிலும் உள்ளனவாகும் உறுப்புகளாகிய கணமாகும். ஆகவே, இரு கணங்களின்

ஊடறுப்பில் அவ்விரு கணங்களிலுமுள்ள உறுப்புகள் மட்டுமே அடங்கியிருக்கும்.

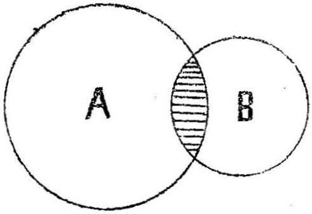
பல கணங்கள் ஊடறுத்து நிற்குமானல், அக் கணங்களுக்கெல்லாம் பொதுவாகிய உறுப்புகளாலாகிய கணமே ஊடறுப்பில் காணப்படும்.

A, B என்பன இரு கணங்களானல், அவற்றின் ஊடறுப்பு $A \cap B$ என்று வரையப்பட்டு 'A வெட்டுB' அல்லது 'A cap B' என்று படிக்கப்படும்.

$$A \cap B = \{ x : x \in A\text{-ம்},\ x \in B\text{-ம்} \}$$

$$A = \{ 1, 3, 5 \} \text{-ம்},\ B = \{ 0, 2, 3, 5, 7, \} \text{-ம்}$$

ஆனல் $A \cap B = \{ 3, 5 \}$ ஆகும்.



படம் 27.

27-ம் படத்தில் வரியிடப்பட்ட பகுதி $A \cap B$ஐக் குறிக்கும்.

குறிப்பு: (i) படத்திலிருந்து $A \cap B = B \cap A$ என்பது தெளிவாகும்.

அதாவது, கண வெட்டும் மாற்றுவிதிக்கு உட்பட்டது என்பது தெளிவாகிறது.

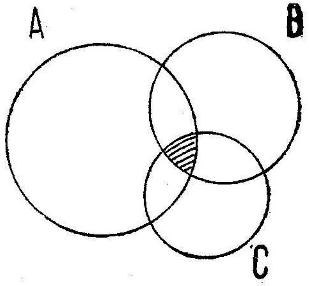
(ii) $A \cap B$-யிலுள்ள உறுப்புகள் A, B என்னும் இருகணங்களிலுமுள்ளன.

$\therefore$ $A \cap B$ ஆனது A, B என்றவற்றின் உட்கணமாகும்.

அதாவது, $(A \cap B) \subset A$; $(A \cap B) \subset B$.

(iii) A-ம் B-ம் தம்மிடையே பொதுவான உறுப்புகளைப் பெற்றிராவிட்டால் அதாவது A-ம், B-ம் ஒட்டாக் கணங்களானல், அப்பொழுது $A \cap B = \phi$

(iv) A, B, C-ன் ஊடறுப்பு அல்லது வெட்டுநிலையானது $A \cap B \cap C$ என எழுதப்படும். எழுத்துகளின் வரிசையமைப்பு முக்கியமல்ல.



படம் 28.

(v) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ என்பதும் படம் 28 விளக்கத்தால் புலப்படும்.

2 8 ஒன்றியமும் ஊடறுப்பும் (Union and intersection)

$\bigcup$ ஒரு கணமாகியும், A ஓர் உட்கணமாகியும், A' அதன் நிரப்புக் கணமாகியுமிருந்தால்,

$$A \cup A' = \bigcup; \quad A \cap A' = \phi$$

$$A \cup U = \bigcup; \quad A \cap U = A.$$

$$A \cap A' = \phi; \quad A \cup \phi = A; \quad A \cap \phi = \phi$$

எனப் பெறுகின்றோம்.

குறிப்பு: வெற்றுக் கணமானது எண் கணிதத்தில் எண்களிடையே பூச்சியம் செய்யும் பாகத்தை மேற்கொள்கிறது.

பூச்சிய அல்லது வெற்றுக் கணமானது A என்னும் யாதொரு கணத்துடன் ஊடறுத்தலையோ, ஒன்றியத்தையோ செய்தால் A என்னும் ஆதிக்கணமே கிடைக்கப் பெறுகின்றோம்.

வென் விளக்கப்படங்களிலிருந்து பின்வரும் பலன்களை ஏற்கெனவே பார்த்தோம்:

(i) ஒன்றியம் என்பது பரிமாற்றுச் செயல் நிலையாகும்.

அதாவது, $A \cup B; \quad B \cup A$

(ii) ஊடறுப்பு ஒரு பரிமாற்றுகும்.

$$A \cap B = B \cap A$$

(iii) கணங்களின் ஒன்றியம் ஒரு சேர்க்கையாகும்.

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

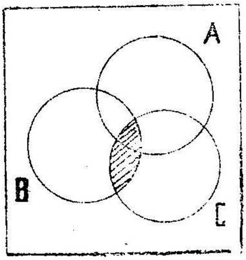
(iv) கணங்களின் ஊடறுப்பு ஒரு சேர்க்கையாகும்.

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

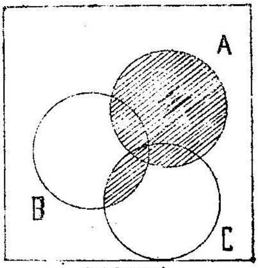
2.9. மேலும் பின்வரும் பலன்களையும், வென்ன் விளக்கப் படங்களிலிருந்து சுலபமாக வருவிக்கலாம்.

(i) கணங்களின் ஒன்றியமானது அக்கணங்களின் ஊடறுப்பைப் பொறுத்து ஒரு சேர்க்கையாகும்.

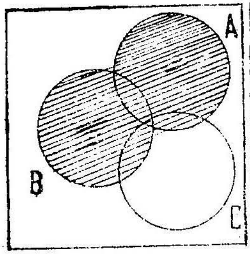
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$



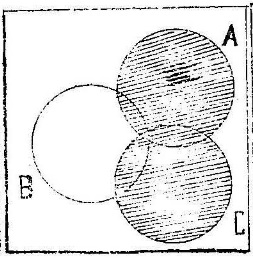
$B \cap C$



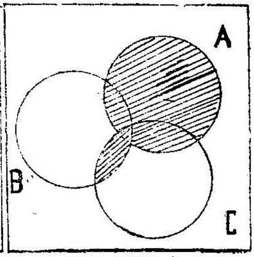
$A \cup (B \cap C)$



$A \cup B$



$A \cup C$



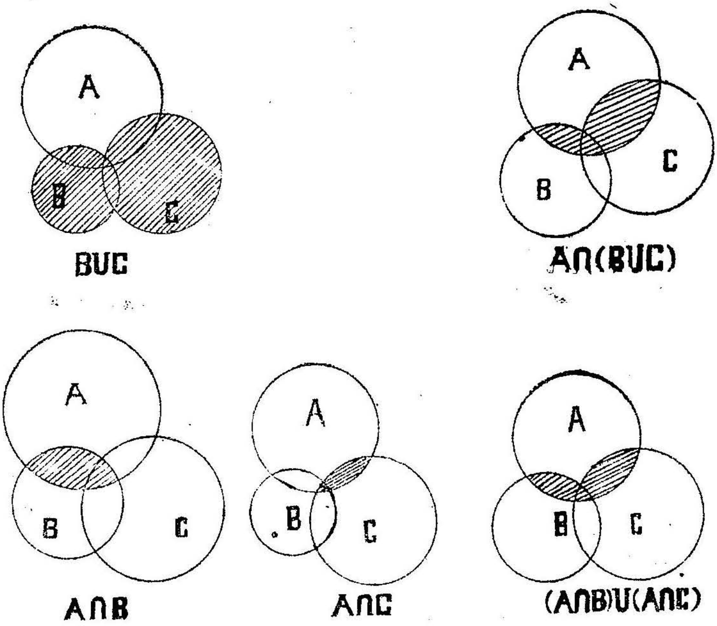
$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

படம் 29.

இதனை 29-ம் படத்தில் காட்டியபடி வென்ன் படங்கள் விளக்கா நிற்கும்.

(ii) ஊடறுத்தல் ஒன்றியத்தின் மேல் பரப்புதலைச் செய்கிறது (Intersection distributes over union).

அதாவது, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. இது 30-ம் படத்தால் அறியப்படும்.



படம் 30.

பயிற்சி 1

1. பின்வரும் கணங்கள் ஒத்தனவா ? வேறுபட்டனவா ?

(i) $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{1, 3, 2, 3, 1\}$

(ii $A = \{0, 1, 2\}$; $B = \{1, 2, 2\}$

(iii) $A = \{2, 4, 6, 8\}$

$B = \{x : x$ ஆனது 10-க்குக் குறைந்த இரட்டைப் படையெண் $\}$

$C = \{8, 2, 6, 4\}$.

2. பின்வரும் கணங்கள் ஒத்தனவாமெனக் காட்டுக:

(i) $\{x \mid x$ ஆவது follow என்னும் சொல்லிலுள்ளதோ ரெழுத்து.

(ii) $\{x \mid x$ ஆவது flow என்னும் சொல்லிலுள்ளதோர் எழுத்து.

(iii) wolf என்னும் சொல்லிலுள்ளதோர் எழுத்து.

3. சமக் கணங்களுக்கும், ஒப்புடைக் கணங்களுக்குமுள்ள வேறுபாட்டினை விளக்குக.

4. பின்வரும் சொற்களிலுள்ள எழுத்துகளின் கணத்தை வரைக:

(i) Missisipi (ii) Allahabad (iii) Calculus.

5. $\{0, 1, 1, 2, 1, 0, 2, 2, 1, 0\}$ என்னும் கணத்தைச் சுருக்கமாக வரைக.

6. பின்வரும் கணங்களை விதி வடிவில் (Rule Form) கூறி, ரோஸ்டர் முறை கடினமானது அல்லது இயலாதது என்பதற்குத் தக்க காரணங்களைக் காட்டுக:

(i) 50-க்கு மேற்பட்ட மிகை இராசி முழு எண்கள்

(ii) நமது கல்லூரி நூல் நிலையத்துள்ள நூல்கள்

(iii) 10-க்குக் குறைந்த பரப்புடைய முக்கோணங்களின் தொகுதி.

7. பின்வருவனற்றைக் கருத விதிமுறையைக் கூறலமையுமா?

(i) Tom, Dick, Harry என்னும் மாணவர் திரள்.

(ii) ஜனவரி, மே, ஜூலை என்னும் மாதங்கள்.

8. $\{x : x$ ஆவது கூட்டுப்பலன் 5 ஆகும் இரண்டு இலக்கமுடைய எண்கள்$\}$ — இதற்குக் கணம் யாது?

9. $\Sigma = \{P \mid P$ ஒரு தளத்திலுள்ள புள்ளியாகி, தளத்திலுள்ள O என்னும் புள்ளியிலிருந்த 3 அலகு தூரமுள்ளது$\}$.

10. $d = \{ P \mid P$, ஒரு தளத்திலுள்ள புள்ளியாகி, அத்தளத்திலுள்ள இரண்டு புள்ளிகளிலிருந்து சம தூரத்திலிருப்பது $\}$

11. பின்வரும் கணங்களைக் கணிக்க :

(i) $A = \{ x \mid 3x - 2 = 0 \}$

(ii) $A = \{ x : x^2 - 5x + 6 = 0 \}$

(iii) $A = \{ x \mid x$, என்பது 10-க்குக் குறைந்த இரட்டைப் படை முழுவெண் $\}$

12. அட்டவணை வடிவில் வெளிப்படுத்துக :

$A = \{ x : x$, ஒரு பகாவெண் $x < 20 \}$

13. ϕ, $\{ 0 \}$, $\{ \phi \}$ என்னும் கணங்களின் வேறுபாட்டைப் புலப்படுத்துக.

14. $S = \{ x : x + 3 = 3 \}$ என்பது பூச்சியக்கணமா ?

15. பின் வருவனவற்றிற்குரிய எல்லா உட்கணங்களையும் வரைக :

(i) $\{ 0, 1, 2, 3 \}$ (ii) $\{ 5, 6, 7 \}$

16. n மூலங்களைக் கொண்ட கணத்திலிருந்து 2^n உட்கணங்களை அமைக்கலாமெனக் காட்டுக.

17. பின் வரும் கூற்றுகள் பொய்யா மெய்யாவென நிச்சயிக்க :

(i) $2 \in \{ 1, 2, 3 \}$ (ii) $\{ 2 \} \in \{ 1, 2, 3 \}$

(iii) $5 \subset \{ 4, 5, 7 \}$ (iv) $\{ 5 \} \subset \{ 4, 5, 7 \}$

(v) $2 \in \{ 1, 4, 5 \}$ (vi) $\{ 2 \} \subset \{ 1, 4, 5 \}$

18. $A = \{3, 7, 10, 11, 15\}$; $B = \{7, 9, 11, 15, 16\}$ ஆனால், (i) $A - B$, (ii) $B - A$ என்பவற்றைக் காண்க.

19. $E = \{ 0, 2, 4, 6 \}$; $F = \{ 0, 3, 6, 7, 11 \}$ ஆனால், (i) $E - F$, (ii) $F - E$ என்பவற்றைக் காண்க.

20. $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A = \{0, 1, 3, 5, 6\}$

$B = \{2, 3, 6, 7\}$

ஆனால், A', B'; $A \cup B$, $A \cap B$, $(A \cup B)'$; $(A \cap B)'$; $A - B$; $B - A$; $(A - B)'$ என்பவற்றைக் கண்டறிக.

21. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$,

$C = \{3, 4, 5, 6\}$ என்றால்

(i) $A \cup B) \cup C$-ம் $A \cup (B \cup C)$-ம் ஆகியவற்றைக் கண்டறிந்து, அவை சமமாகுமெனக் காட்டுக.

22. $A = \{1, 7, 9\}$, $B = \{3, 4, 6, 11, 12\}$;

$C = \{2, 5, 6\}$ ஆனால்,

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ஆகுமெனக் காட்டுக.

23. வென்ன் படங்களைப் பயன்படுத்தி,

$n(A \cup B) = 25$; $n(A \cap B) = 5$; $n(B) = 12$

எனக் கொடுத்தது கொண்டு $n(A)$ ஐக் கண்டறிக.

24. U = நகரக் கல்லூரி மாணவர்கள்

M = கணிதம் பயிலும் மாணவர்கள்

P = இயற்பியல் படிக்கும் மாணவர்கள்

C = இரசாயனம் படிக்கும் மாணவர்கள்

ஆனால்,

(i) மூன்று பாடங்களையும் பயிலும் மாணவர்கள்

(ii) இரசாயனம் நீங்கக் கணிதத்தையும், இயற்பியலையும் பயிலும் மாணவர்கள் என்பவற்றை வென்ன் படங்களால் விளக்குக.

2. சார்பலக் கொள்கை

(Function Concept)

1.1. வரிசைமுறை சோடிகள் (Ordered Pairs)

ஒரு தளத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலேவுகள் (3,2) ஆகுக. இங்கு (3, 2) என்பது 3 ஐ முதல் மூலமாகவும், 2 ஐ இரண்டாம் மூலமாகவும் கொண்டுள்ள ஓர் ஒழுங்குப்பட்டதொரு சோடியாகும். இத் துணையாயத் தொலேவுகளை (2, 3) என்றெழுதினுல், புள்ளியானது தனது இடநிலையை மாற்றிக் கொள்ளும். ஆகவே, x ஆயத் தொலேவை முதலாவதாகவும், y ஆயத் தொலேவை இரண்டாவதாகவும் எழுதுவது ஒரு புள்ளியின் நிலையைக் குறிப்பிடுதற்கண் மிகவும் முக்கியமானதாகும். இவ்வொழுங்கு முறை இயற்கணிதத்திலும் கொள்ளப்படுகின்றது.

விவரணம் : ஏக காலத்தில் எவையேனும் இரு பொருள்கள் ஓர் ஒழுங்கு முறையில் கருதப்பட்டால், அவைகள் ஒழுங்குபட்ட ஒரு சோடி எனப்படும். a, b என்பன இரு பொருள்களாகி, a ஐ முதலிலும், b ஐ இரண்டாவதாகவும் எழுதுவது ஒழுங்கு முறையானுல், அப்பொழுது ஒழுங்குபட்ட சோடியானது (a, b) என்று எழுதப்படும்.

1.2 இருகணங்களின் பெருக்கற்பலன் (Product of two Sets)

A, B என்பன இருகணங்களாகி, a என்பது A-ன் மூலமாகவும், b என்பது B-ன் மூலமாகவும் இருந்தால், அப்பொழுது (a, b) என்னும் ஒழுங்குபட்ட சோடியைக் கொண்டுள்ள கணமானது A, B-க்களின் பெருக்கல் கணமெனப்பட்டு $A \times B$ எனக் குறிக்கப்படும்.

$A = \{1, 3, 7\}$; $B = \{2, 5\}$ எனக் கருதுக. அப்பொழுது $A \times B$ என்பது எல்லா ஒழுங்குபட்ட சோடிகளின் கணமாகும். அதாவது, அக்கணம் (1, 2,); (1, 5); (3, 2); (3, 5); (7, 2); (7, 5) ஆகும்.

குறிப்பு: நாம் $B \times A$ என்று வரைந்தால் $B \times A = (2, 1); (2, 3); (2, 7); (5, 1); (5, 3); (5, 7)$ எனப் பெறுவோம். மேலும்,

$A \times A = (1, 1); (1, 3); (1, 7); (3, 1); (3, 3); (3, 7); (7, 1); (7, 3); (7, 7)$ ஆகும்.

2. மாற்றமும், சார்பலன்களும் (Mapping and Functions)

(i) ஒரு நூல்நிலையத்திலுள்ள புத்தகங்கள் B என்னும் கணம் ஆகவும், மிகை இராசி முழுவெண்களெல்லாம் N என்னும் கணம் ஆகவும் கொள்ளுவோம். இவ்விரு கணங்களும் பெற்றுள்ளதொரு குறிப்பிட்ட தன்மையுமுண்டு. ஒவ்வொரு புத்தகத்திற்கும் ஒத்ததாகப் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையென்னும் மிகை இராசி முழுவெண் உள்ளது. அதாவது இவ்வகையாக, B-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலத்திற்கும் N ஒரு தனிப்பட்டதொரு மூலம் உண்டென்பதாம்.

இது B என்னும் கணத்தை N என்னும் கணத்தினுள் மாற்றிப் புகுத்தற்கு ஏற்றதோர் உதாரணமாகும்.

(ii) $H = \{h_1, h_2, h_3 - \ldots \ldots h_{25}\}$ என்னும் கணம் ஒரு குறிப்பிட்ட வீதியிலுள்ள வீடுகளையும்.

$$C = \{C_1, C_2, \ldots \ldots C_{40}\}$$

என்னும் கணம் அவ்வீதியில் வசிக்கும் குழந்தைகளையும் குறிப்பிடுவனவாகட்டும். இங்கு C என்னுமொவ்வொரு குழந்தைக்கும், குழந்தை வசிக்கும் H என்னும் வீட்டிற்கும் இயற்கையான தொடர்பு உள்ளது. C_1 ஐ h_1 உடனும், C_2 ஐ h_5 உடனும், C_3 ஐ h_{25} உடனும், C_4 ஐ h_1 உடனும், C_{40} ஐ h_{17} உடனும் என இங்ஙனம் தொடர்புறுவதாகக் கருதுவோம்.

C-ன் யாதொரு மூலத்துடனேனும் சேர்க்கையுறும் H-ன்மூலம் இம் மாற்றத்தின் கீழ் C-க்குரிய மூலத்தின் பிரதியீடு (image) எனப்படும்.

(iii) வேறோர் உதாரணம்: ஒரு நகரில் 20,000 வாக்காளர்களும், 40 தேர்வுச் சாவடிகளும் உண்டெனக் கருதுவோம். ஒவ்வொரு வாக்காளனும் ஒரு குறிப்பிட்ட தேர்வுச் சாவடிக்குத் தேர்வுக்குரிய ஆணையாளரால் ஏதோ ஒரு முறைப்படி ஒதுக்கப்படுகிறான்.

இங்கு $X = 20,000$ வாக்காளர்களின் தொகுதி

$Y = 40$ தேர்வுச் சாவடிகளின் தொகுதி.

சார்பலன் : வரையறை :

நாம் இந்தச் சார்பலனுக்கு முறைமையானதொரு விவரணத்தைக் கொடுக்கலாம்.

x-ன் ஒவ்வொரு மூலத்திற்கும் y-ன் ஒரு தனிப்பட்ட மூலத்தைக் கொடுப்பதாகிய ஒப்புமையோ அல்லது விதியோ xஐ y-ல் புகுத்தும் சார்பலன் ஆகும்.

இவ்வாருக, ஒரு சார்பலனது இரண்டு கணங்களையும் ஒரு ஒப்பு முறை அல்லது நியமத்தையும் கொண்டுள்ளதாகும்.

இயற் கணிதப்படி ஒரு சார்பலன் அல்லது மாற்றத்தைப் பின் வருமாறு விவரணஞ் செய்கின்ரேம் :

X, Y என்பன யாவையேனும் பூச்சியமாகாத இரு கணங்களாகுக. அவற்றின் மூலங்கள் முறையே x, y எனக் குறிக்கப் படுவனவாகுக. அதாவது, $x \in X$, $y \in Y$.

ஒவ்வொரு x-க்கும் ஒரு குறிப்பிட்ட yஐத் தொடர்பு படுத்துவதாகும் f என்னும் ஒப்புமுறை உளதாகுக. அப்பொழுது f ஆனது x ஐ y-யினுள் புகுத்தும் மாற்றமென மொழிகின்ரேம்.

f பிரதியீடு (f - Image) :

x-ன் யாதொரு மூலத்திற்கேனும் ($\in X$) ஒப்பு முறையதாகிய y மூலத்தை ($\in Y$) $f(x)$ என்னும் குறியீட்டால் சுட்டி, x-ன் f பிரதியீடு என்ரே, x-க்கான சார்பலனின் மதிப்பென்ரே வழங்குகின்ரேம்.

f ஆனது Y-க்கு X-ன் மாற்றமாகு மென்னுஞ் செய்தியை $f: X \rightarrow Y$ எனக் குறிக்கின்ரேம். இதனைக் 'கணம் Y-ன் மேல் கணம் X ஐ f மாற்றுகின்றது' எனப் படிக்கின்ரேம். அல்லது கணம் X ஐ Y-ல் புகுத்தும் சார்பலன் f எனப் படிக்கலாம்.

X என்னும் கணம் அரங்கம் (domain) என்றும், Y ஆனது மாற்றம் f-ன் வீச்சு (range) என்றும் கூறுகின்ரேம்.

x ஆனது X-ன் மூலமாளுல், $y = f(x)$ என்றெழுதுகின்ரேம். இது x என்னுமிடத்தில் சார்பலன் f-ன் மதிப்பாகும்.

(x, y) என்பதற்குப் பதிலாக $\{x, f(x)\}$ என்றும் எழுதுகின்ரேம்.

3.1. அட்டவணை முறையில் சார்பலனைக் குறிப்பிடுதல்

(i) ஒரு சார்பலன் X-ன் ஒவ்வொரு மூலத்துடனும் Y-ன் ஒரே யொரு மூலத்தைதான் பிரதியீடாகக் கொள்ளுமென்பது நோக்கத்தக்கதாகும். இக்காரணத்தினால், பின் வருவதனை ஒரு சார்பலனெனக் கூறலாகாது.

X	1	2	−1	0	3	1
Y	5	0	1	−2	1	−1

மேற்காட்டியதில் X-ல் உள்ள 1 என்னும் மூலத்திற்கு Y-ல் 5-ம், −1-ம் ஆகிய பல மூலங்கள் பிரதியீடாக நிற்றலால், அஃதொரு சார்பலனுதற்கு ஏற்காது.

(ii) பின் வரும் ஒப்பு முறையில் X-க்குரிய 0, 2, −5 ஆகிய மூலங்கள் Y-க்குரிய −4 என்னும் ஒரே மூலத்தொடு ஒப்புற நின்றுலும், அவ்வொப்பு முறை யொரு சார்பலனுதற்குச் செல்லும்.

X	0	1	2	−3	−5
Y	−4	5	−4	0	−4

மேற்கூறிய வகைகளில் தொடர்பானது மதிப்புகளின் அட்டவணை வாயிலாகக் கொடுக்கப்பட்டன.

3.2. சூத்திரம் அல்லது சமன்பாட்டின் வாயிலாகச் சார்பலன் அல்லது மாற்றம் (Function or mapping by means of formula or equation)

$y = 2x^2 + 3$ என்பதைப் போன்ற சமன்பாடு அல்லது சூத்திரத்தின் வாயிலாகக் குறிப்பிடும் வேறொரு முறையுமுண்டு.

இங்கு எந்த மெய்யெண்ணையேனும் x-ன் மதிப்பாகக் கொடுக்கலாம். மெய்யெண்களின் கணம் R எனின், மேற்கூறிய சார்பலனுக்கு R ஓர் அரங்கமாகும். அரங்கத்தின் x என்னும் ஒவ்வொரு மூலத்திற்கும் ஒத்ததாகிய y மதிப்பு x-ன் பிரதியீடாகக்

கூறப்படும். x கணத்தின் எல்லா மூலங்களினுடைய எல்லா f பிரதியீடுகளின் தொகுதியும் Y கணத்தை அமைக்கின்றதனுல், f பிரதியீடுகளின் கணமானது சார்பலனின் வீச்சு எனப்படும்.

மேற்கூறிய வகையில் x மெய்யெண்ணுதலின். $2x^2 + 3 \geqslant 3$ ஆகும். ஆகவே, இச்சார்பலனின் வீச்சு ஆவது,

கணம் $Y = \{ y \mid y \in R, y \geqslant 3 \}$ ஆகும்.

4. (i) உள் மாற்றம் (Mapping into)

x-ன் ஒரு மூலத்தினது f-பிரதியீடாகவேனும் ஆகாதபடி y-ன் குறைந்த பக்கம் ஒரு மூலமேனும் இருக்கும்படி மாற்றம் $f: x \rightarrow y$ இருந்தால், அப்பொழுது f ஆனது y-க்குள் x-னுடைய மாற்றமாகும் அல்லது f ஆனது ஒரு உட்புகு (into) அல்லது உட் சார்பலன் எனப்படும்.

(ii) மேல் மாற்றம் (Mapping onto)

x-ன் குறைந்த பக்கம் ஒரு மூலத்தின் f பிரதியீடாக y-ன் ஒவ்வொரு மூலமும் இருக்கும்படி $f: X \rightarrow Y$ மாற்றம் உண்டாகுமானுல், அப்பொழுது f ஆனது y-ன் மேல் x-ன் மாற்றமாகும் அல்லது f ஆனது ஒரு மேல் சார்பலன் எனப்படும் (on to function).

ஒரு தபால்காரர் கடிதங்களைப் பல பகுப்பு அறைகளில் பிரிக்கின்ருரெனக் கொள்ளுவோம். ஒவ்வொரு பகுப்பு அறையும் யாதொன்றேனும் காலியுருமல் ஒன்ருே அல்லது பலவோ ஆகிய கடிதங்களைப் பெறுமானுல், அப்பொழுது Y பகுப்புகளுடன் X கடிதங்களுடைய ஒப்புறவானது மேல்மாற்றத்திற்குத் தக்கதோர் எடுத்துக் காட்டாகும்.

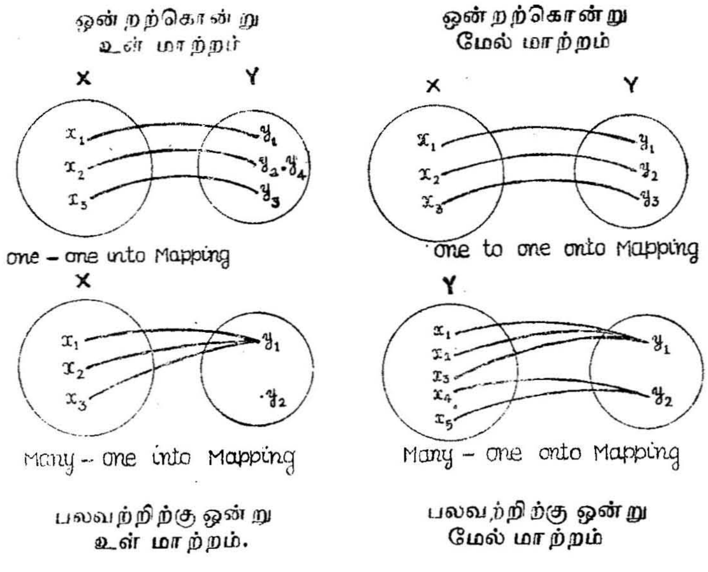
ஆனுல் சில பகுப்பு அறைகள் காலியாகுமானுல், அப்பொழுது Y பகுப்பறைகளின்மீது X கடிதங்களின் மாற்றமானது உள் மாற்றமெனப்படும்.

(iii) ஒன்றற்கொன்று எனும் மாற்றம்(one to one Mapping)

$f: X \rightarrow Y$ மாற்றத்தில் X-ன் இரு வேறு மூலங்கள் Y-ன் வேறுபட்ட பிரதியீடுகளைக் கொண்டால், அது Y-ன்மேல் X-ன் ஒன்றுக்கொன்றே எனும் மாற்றமாகும் (அ-து) X-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலத்திற்கும் Y-ல் தனித்தனிப் பிரதியீடுகள் இருக்கவேண்டும்.

(iv) பலவற்றிற்கு ஒன்றெனும் மாற்றம்(Many-one Mapping)

X-ன் இரு வேறு மூலங்கள் Y-ல் ஒத்ததொரு f பிரதியீட்டைப் பெறும்படியாக $f : X \rightarrow Y$ என்னும் மாற்றம் நிகழ்வுற்றால். அது பலவற்றிற்கு ஒன்றெனும் மாற்றம் அல்லது பல—ஒரு மாற்றம் எனப்படும். பின்வரும் படங்கள் இம்மாற்றங்களை விளக்குவனவாகும் :



படம் 31.

(v) நிலையான (மாறாத) சார்பு (Constant function)

X-ன் ஒவ்வொரு மூலத்திற்கும் $y \in Y$-ன் ஒரே மூலமானது பிரதியீடு ஆகும்படி $f : X \rightarrow Y$ இருந்தால், f ஆனது நிலையான சார்பலனெனப்படும்.

(vi) முற்றொருமை மாற்றம் (Identity function)

X என்பதொரு கணமாகி X-ல் உள்ள எந்த மூலம் x-க்கும் $f(x) = x$ ஆகும்படி சார்பலன் $f : X \rightarrow X$ இருந்தால் அதாவது, X-ன் ஒவ்வொரு மூலத்திற்கும் Y-ல் அதேமூலம் கொடுக்கப்படுமானால், அப்பொழுது f ஆனது முற்றொருமைச் சார்பலன் எனப்படும்,

(vii) நேர்மாறுன சார்பலன் அல்லது மாற்றம் (Inverse function or Mapping)

$f: X \rightarrow Y$ என்பது ஒன்றற்கொன்று என்னும் மாற்றமும், மேல் மாற்றமும் ஆகுமெனக் கருதுக. அப்படியானுல், $y \in Y$ என்னும் யாதொரு மூலத்திற்கும் $f(x)=y$ ஆகும்படி $x \in X$ என்னும் ஒரு மூலம் சரியாக இருக்கும்.

இப்பொழுது, xஐ $f^{-1}(y)$ எனக் குறிப்பிட்டால், அதாவது f-ன் மாற்றத்தின்கீழ் y-ன் நேர்மாறுன பிரதியீட்டால் குறிப்பிட்டால், அப்பொழுது பின்வரும் விவரணம் கிடைக்கப் பெறுவோம் :

விவரணம் : $f: X \rightarrow Y$ ஆனது ஒற்றற்கொன்று என்னும், மாற்றமும், மேல்மாற்றமும் ஆனுல், அப்பொழுது $f^{-1}: Y \rightarrow X$ எனும் மாற்றமானது $f: X \rightarrow Y$ என்ற மாற்றத்திற்கு நேர்மாறுன தாகும்.

உதாரணம் :

X என்பது விகிதமுறும் எண்களின் கணங்களாகட்டும்.

$f: X \rightarrow X$ என்னும் மாற்றம் ஆனது, $f(x) = 2x+3$ $(x \in R)$ என விவரணம் பெறுவதாகட்டும்.

தெளிவாக மாற்றமானது ஒன்றற்கொன்று என்பதும் மேல் மாற்றமும் ஆகும்.

இப்பொழுது, $2x+3 = y$ ஆனுல், அப்பொழுது $x = \dfrac{y-3}{2}$.

ஆகவே, நேர்மாறுன மாற்றம் $f^{-1}: X \rightarrow X$ ஆனது,

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$$ என்றதனுல் தரப்படும்.

நாம் வழக்கமாக சார்பற்ற மாறியை x ஆலும், சார்புறு மாறியை y ஆலும் குறிப்பிடுவதுண்டு ஆதலால், நேர்மாறுன மாற்றமானது x ஐயும் y ஐயும் பரிமாற்றி,

$$y = \frac{x-3}{2}$$ என்றெழுதப்படும்.

பயிற்சி 2

1. $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{9, 10\}$ ஆனல்,

$X \times Y$ ஐக் காண்க.

2. கீழ்க்கண்ட ஒழுங்கற்ற சோடிக் கணங்கள் சார்பலனு அல்லவா என்று கண்டறிக ; அல்லனவாயின் ஏன் சார்பலனுகா வெனச் சாற்றுக.

(i) (0, 1); (1, 2); (2, 3); (3, 0)

(ii) (1, 0); (0, 1); (1, 2); (0, 3)

(iii) (0, 1); (1, 0); (2, 1); (3, 0).

3. $x, y \in R$ எனக் கொடுத்தது கொண்டு பின்வரும் சார் பலன்களுக்கு அரங்கையும் வீச்சையும் அறிக :

(i) $f : x \to x$ (ii) $g : x \to \sqrt{x}$

(ii) $g : x \to x^2$ (iv) $h : x \to \dfrac{x}{1 - x}$

(v) $h : x \to \dfrac{1}{x^2 - 9}$.

4. $\{(x, y) \mid x^2 + y = 5\}$ என்னுஞ் சார்பலனுக்கு வீச்சை வருவிக்க.

5. $\cup = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ஆனல், $\{(x, y) \mid y + 2 = x\}$ ன் தீர்வுக் கணத்தைக் காண்க.

6. "$F(t) = |t|$ ஒவ்வொரு t என்னும் மெய்யெண்ணுக்கும்" என்னும் விவரணம் கொடுக்கப்பட்ட சார்பலன் F-ன் உடைய வீச்சு என்ன? (i) $F(0)$, (ii) $F(a) - F(-a)$ ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணுக்கும், (iii) $\dfrac{F(-3)}{3}$ என்பவற்ருல் அறியலாகும் மெய்யெண்கள் யாவை ?

7. பின்வரும் மாற்றங்களைச் சோதித்து, மாற்றத்தின் தன்மையானது "ஒன்றற்கொன்று" என்பதா, "மேல்" என்பதா? இவை முதலாக யாதாகுமெனக் கூறுக :

(i) $X = \{1, 2, 7\}$; $Y = \{x, y, u\}$ -ம்

$f(1) = x$; $f(2) = y$, $f(7) = u$ - ம்

(ii) $X = \{a, b, c, d\}$; $Y = \{0, 1, 2\}$

$a \to 0$; $b \to 1$, $c \to 0$, $d \to 1$ ஆகும்பொழுது.

(iii) $f(x) = x^2$, $x \in I$ (I என்பது மிகை இராசி முழுவெண் கணம்) என்பவற்ருல் விவரணம் செய்யப்பட்ட $f : I \to I$ என்னும் மாற்றம்.

(iv) $f(x) = x^2$, $x \in R$ (R என்பது மெய்யெண்களின் கணம்) என்பவற்ருல் விவரணம் பெறும் $f : R \to R$ என்னும் மாற்றம்.

(v) $x : x \in R, x \neq 0$ ஆகுங்கால், $f(x) = \frac{1}{x}$ என்றதனுல் விவரணம் செய்யப்பட்ட $f : X \to X$ என்னும் மாற்றம்.

(vi) $-\frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi$-ம் ஆகும்படி X என்னும் மெய்யெண்களின் கணமும் $-1 \leqslant Y \leqslant 1$ ஆகும்படி Y என்னும் மெய்யெண்களின் கணமும் ஆகுமாறு $f(x) = \sin x$ என்றதனுல் விவரணம் செய்யப்பட்ட $f : X \to Y$ என்னும் மாற்றம்.

8. (i) முழுவெண்களின் கணம் I ஆகுங்கால் $f(x) = x^2$ என்றதனுல் $f : I \to I$ என்பது விவரணம் செய்யப்பட்டதெனின், $f^{-1}(25)$, $f^{-1}(-4)$ என்பவற்றைக் கண்டறிக.

(ii) R என்பது மெய்யெண்களின் கணமாகுமிடத்து $f(x) = (x^2 + 1)$ என்றதனுல் $f : R \to R$ என்பது விவரணம் செய்யப்பட்டதெனின், $f^{-1}(17)$ஐக் கண்டறிக.

3. ஒரு சமனின்மையின் (அசமன்பாட்டின்) தீர்வுக் கணம் பற்றிய வரைபட விளக்கம்

(Graphical representation of the solution set of an inequality)

1. விவரணம்: கொடுத்ததொரு சமனின்மைக்குப் பொருந்துவனவாகிய எல்லா எண்களின் தொகுதியையும் அச் சமனின்மையின் (அசமன்பாட்டின்) தீர்வுக்கணம் எனக் கூறுகின்றோம்.

2. $x + 1 > 3x - 1$ என்னும் சமனின்மையின் தீர்வுக் கணத்தைக் காண்க.

எல்லா உறுப்புகளையும் இடது பக்கத்திற்கு மாற்றினால்,

$x + 1 - 3x + 1 > 0$ எனப்பெறுகின்றோம்.

அதாவது, $-2x + 2 > 0$

,, $2x - 2 < 0$ ... ... (1)

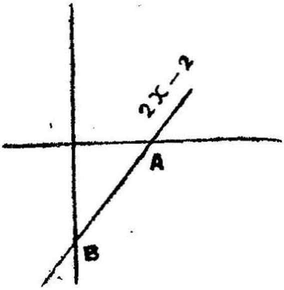
,, $x < 1$

ஆகவே, தீர்வுக்கணம் $\{ x \mid x < 1 \}$ ஆகும்.

3. வடிவ கணிதவாயிலாக $x + 1 > 3x - 1$ என்னும் சமனின்மையின் தீர்வுக்கணத்தைக் காண்க. எல்லா உறுப்புகளையும் மேற்கூறிய படியே இடப்பக்கமாகத் தள்ளியெழுதினால், $2x - 2 < 0$ ஆகும்.

சமன்பாடானது ஒருபடியுடையதாகும். ஆகவே, இது ஒரு நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கும். $2x - 2$ குறை இராசியாகும் வகையை

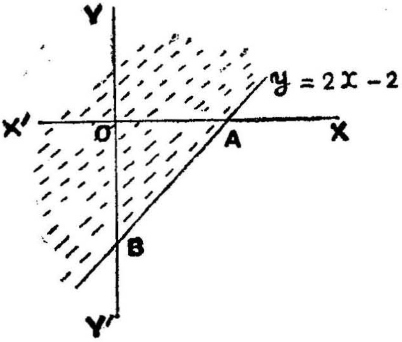
நாம் காணுதல் வேண்டும். இதனை y என்னும் சார்பலனாக இட்டுக் கொண்டோமாதலின், y எப்பொழுது குறை இராசியாகு மெனக் காணுதல் வேண்டும். ஒரு புள்ளியானது X அச்சுக்குக்



படம் 32.

கீழிருக்கும்பொழுது y ஆனது குறை இராசியதாகும். ஆகவே, நேர்க்கோட்டிலுள்ள புள்ளிகள் X அச்சுக்குக் கீழ் எப்பொழுதுள்ள தாகுமெனக் கண்டறிதல் வேண்டும். படத்திலிருந்து $x < 1$ ஆகும்பொழுது, நேர்க்கோடானது X அச்சுக்குக் கீழிருக்கும் எனத் தெளிவாகின்றது.

4. $2x-y-2<0$ ஐ வரிவடிவ கணித வகையில் குறிப்பிடுக.



படம் 33.

$$-y < -2x + 2$$

$$\therefore y > 2x - 2$$

$y = 2x - 2$ என்பதற்கு வரைபடம் வரைக.

∴ $2x - y - 2 = 0$ அதாவது $y = 2x - 2$-ன் தீர்வுக் கணம் நேர்க்கோட்டின் மேலுள்ளதாகும் ஒழுங்குபட்ட சோடியின் கணமாகும்.

$2x - y - 2 < 0$ அதாவது, $y > 2x - 2$-ன் தீர்வுக் கணமாவது நேர்க்கோட்டின் மேல் வரியிட்ட தளத்தின் பகுதியாகும்.

5. $15 + 2x - x^2 < x^2 + 3$ என்னும் அசமன்பாட்டினைத் தீர்வு செய்க.

எல்லா உறுப்புகளையும் இடப்பக்கத்திற்குத் தள்ளி யெழுத,

$12 + 2x - 2x^2 < 0$ எனப் பெறுகின்றோம்.

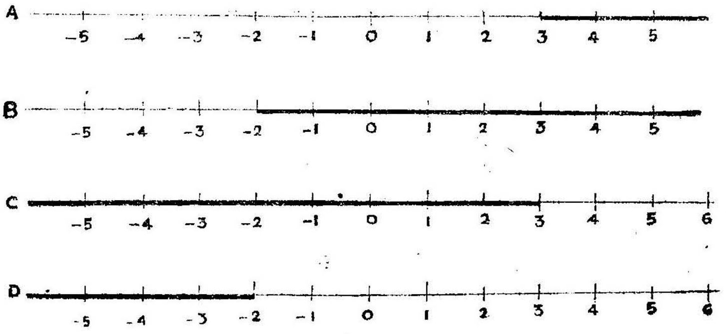
அதாவது, $2x^2 - 2x - 12 > 0$

,, $x^2 - x - 6 > 0$

,, $(x - 3)(x + 2) > 0$.

அசமன்பாடானது $x > 3$ அல்லது $x < -2$ ஆகுமிடத்துப் பொருந்துவதாகின்றது. ஆகையால், கொடுத்த அசமன்பாட்டின் தீர்வுக்கணம் $\{ x \mid x < -2$ அல்லது $x > 3 \}$ ஆகும்.

வேறுவழி : $x^2 - x - 6 > 0$ ஆனால், $(x-3)(x+2) > 0$ ஆகும். $(x-3) > 0$; $(x+2) > 0$ ஆதல்,



படம் 34.

அல்லது $(x-3) < 0$; $(x+2) < 0$ ஆதல் வேண்டும்.

அதாவது,

$$A = \{x \mid (x-3) > 0\} \;;\; B = \{x \mid (x+2) > 0\}$$

$$C = \{x \mid (x-3) < 0\} \;;\; D = \{x \mid (x+2) < 0\}$$

ஆகும்.

∴ தீர்வுக்கணமாவது $(A \cap B) \cup (C \cap D)$ ஆகும்.

$A \cap B = A$

$C \cup D = D$

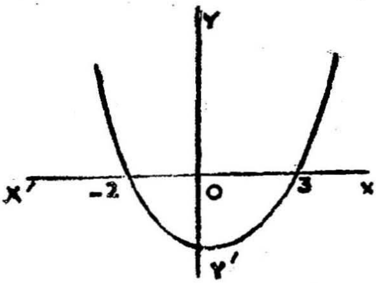
∴ தீர்வுக்கணம் $A \cup D$ ஆகும்.

6. $15 + 2x - x^2 < x^2 + 3$ என்னும் அசமன்பாட்டினை வடிவ கணித முறையில் தீர்க்க.

அதாவது, $x^2 - x - 6 = 0$

$y = x^2 - x - 6$ என்றிடுக.

$y = x^2 - x - 6$-ன் வரைபடத்தை வரைக.



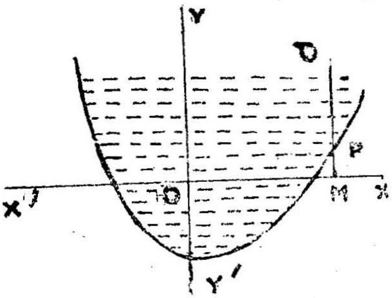
படம் 35.

படத்தில் காட்டியபடி வளைவரையானது ஒரு பரவளையாகும்.

$x^2 - x - 6$ எப்பொழுது மிகை இராசியாகுமென நாம் காணல்வேண்டும். ஆனல், இச் சார்பலனை y என்று இட்டுக் கொண்டோம். ஆகவே, y எப்பொழுது மிகை இராசியாகுமெனக் காணவேண்டும். வளைவரையானது X அச்சுக்குமேல் இருக்கும் பொழுது, y ஆனது மிகை இராசியாகும். அதாவது, $x > 3$ இருக்கும் பொழுதோ, $x < -2$ இருக்கும்பொழுதோ ஆகும்.

7. $y > x^2 - x - 6$ என்பதனை வடிவ கணிதமுறையில் புலப்படுத்துக.

$y = x^2 - x - 6$ என்னும் வளைவரையை வரைக. இது மேற்கூறிய உதாரணத்தில் கண்டபடி யொரு பரவளையாகும். P என்பது பரவளையின்மேல் யாதேனுமொரு புள்ளியாகுக.



படம் 36.

X அச்சுக்குச் செங்குத்தாக PM ஐ வரைக. படத்தில் கண்டபடி MP-ன் மேல் Q ஐக் கண்டிடுக. Q ஆனது (x, y) ஆகட்டும். $P(x_1\ y_1)$ ஆகட்டும். படத்திலிருந்து $QM > PM$ ஆகும்.

அதாவது, $y > y_1$

,, $y > x^2 - x - 6$. ஆகையால் அசமன்பாடானது Q என்னும் புள்ளியால் பொருந்துவதாகின்றது. இதைப்போலவே பரவளையில் புள்ளியிட்ட பகுதியிலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளும் கொடுத்த அசமன்பாட்டிற்குப் பொருந்துமெனக் காணலாம்.

கிளை : $y < x^2 - x - 6$ என்னும் அசமன்பாட்டிற்குப் புள்ளியிடப்பட்ட பகுதி யொழிந்த தளத்திலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளும் பொருந்துவனவாகும்.

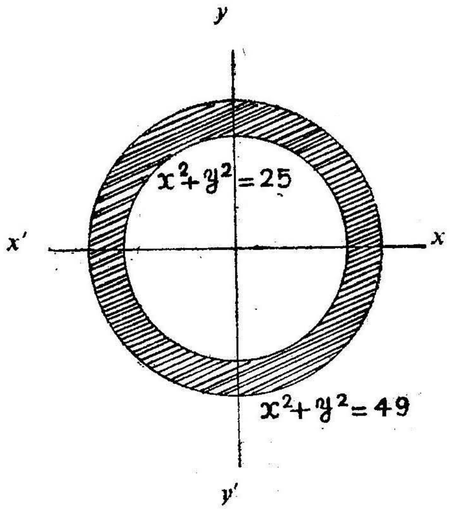
8. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 < 0$ என்னும் அசமன்பாட்டின் தீர்வுக்கணத்தைக் காண்க.

இப்பொழுது, $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ ஆனது

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$ என்னும் வட்டத்தைக் குறிக்கின்றது. இதன் மையம் $(2, 1)$-ம் ஆரம்-3-ம் ஆகும். வட்டத்தின் உட்புறத்துள்ள யாதொரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைவுகளும்

அச்சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்துமென்வாம். தீர்வுக்கணமானது வட்டத்தின் உள்ளேயுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளையும் அகப்படுத்துக் கொள்ளுகிறது.

9. $\{(x, y) : 25 < x^2 + y^2 < 49\}$ என்றதனை வரை பட மூலமாகப் பிரதியிடுக.



படம் 37.

$x^2 + y^2 = 25$; $x^2 + y^2 = 49$ என்னும் இரண்டு வட்டங்களின் பரிதிகளுக்கு இடைப்பட்டு நிற்கும் பரப்பானது தீர்வுக் கணத்தைக் குறிப்பதாதல் கண்கூடாகும்.

பயிற்சி 3

1. $2x+1 > 4x + 5$ என்னும் சமன்பாட்டை விடுவி.

2. வடிவ கணிதவாயிலாகக் குறிப்பிடுக.

   (ii) $3x - 2y - 6 > 0$

   (ii) $2x - 3y - 6 < 0$.

3. $14 - 2x - x^2 < x^2 + 2$ என்னும் அசமன்பாட்டை வரைபட மூலமாகத் தீர்வு காண்க.

4. அசமன்பாட்டைத் தீர்வு காண்க:

(i) $x^2 - 3x - 10 < 0$

(ii) $x^2 - x - 2 > 0$

5. வரைபடத்தால் வரையறுக்க.

(i) $y < x^2 + 3x + 2$

(ii) $y > 2x^2 + 3x + 1$.

6. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 > 0$ என்னும் அசமன்பாட்டிற்குத் தீர்வுக்கணத்தைக் காண்க.

7. வரைபட மூலமாகத் தீர்வு காண்க.

$\{(x, y) : x^2 + y^2 = 16; \quad y > 2.5\}$

8. வரைபடத்தால் விளக்குக.

$\{(x, y) : 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9\}$

கண இயற்கணிதத்தின் மாதிரி கணக்குகள்

(பாடத்திட்டத்தை வரையறுப்பன)

1. பின் வருவனவற்றுள் ஒவ்வொன்றையும் இவ்விரண்டு உதாரணங்கள் தந்து விளக்குக :

(i) பூச்சியக்கணம், (ii) நிரப்புக்கணம், (iii) ஒட்டாக் கணம், (iv) உட்கணம், (v) அடுக்குக்கணம்.

2. விளக்குக : (i) கணங்களின் வித்தியாசம், (ii) கணங்களின் சேர்க்கை, (iii) கணங்களின் வெட்டு.

3. $\cup = 1, 2, 4, 8, 9, 16, 17$; $A = 1, 2, 8, 9$; $B = 4, 9, 1$ எனக் கொடுக்கப்பட்டதனைக் கொண்டு A', B', $A - B$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap B'$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

4. $A = \{a, b, \alpha, \beta, 1, 2\}$; $B = \{\phi, b, \alpha, 2\}$, $C = \{\alpha, \beta, 1\}$ ஆகுமெனின், $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ எனக்காட்டுக.

5. A, B என்பன V என்னும் அகில கணத்தின் வெட்டுக் கணங்களானல், (i) $A \cap B$, (ii) $\bar{A} \cap \bar{B}$ என்னும் இவற்றை விளக்க வென்ன் படங்களை வரைக.

6. வென்ன் படங்கள் மூலம் விளக்குக.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

7. $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{2, 3, 4\}$ எனின்,

(i) $A \times B$, (ii) $B \times C$ இவற்றைக் காண்க.

8. R ஆவது $f(x) = x^2$ என்பதனல் கொடுக்கப்படும் எல்லா மெய்யெண்களுமாகுமிடத்து $f = R \to R$ ஆனல், $f^{-1}(16)$, $f^{-1}(7)$, $f^{-1}(-3)$ ஆகியவற்றைக் கண்டறிக.

9. பின்வரும் சார்பலன்களுக்கு இவ்விரண்டு உதாரணங்கள் தருக :

(i) ஒன்றற்கொன்று, ஆனல் மேலல்ல. (ii) ஒன்றற்கொன்றும், மேலும். (iii) பலவற்றிற்கொன்றும், உள்ளும்.

10. $x^3 - 4x + 4 > 0$ என்னும் அசமன்பாட்டிற்குரிய தீர்வுக் கணத்தைக் கண்டறிந்து வரைபடத்தால் புலப்படுத்துக.

கலைச்சொற்கள்

நுண்கணிதம்

(Calculus)

Constant	— மாறிலி
Continuous	— தொடர்ச்சியான, தொடருரு
Derivative	— வகைக் கெழு
Differentiation	— வகையிடல்
Differentiate	— வகையீடுகாண்
Differential Coefficient	— வகையீட்டுக் குணகம், வகையீட்டுக் கெழு, வகைக் கெழு
Function	— சார்பு, சார்பலன்
Implicit Function	— மறைவுச் சார்பு, உட்படு சார்பு
Explicit Function	— வெளிப்படு சார்பு
Indeterminate	— தேரப்பெருத
Infinity	— கந்தழி
Integral	— தொகை
Definite integral	— வரையறுத்த தொகை
Integrate	— தொகைக் காண்க
Integration	— தொகையிடல்
Limit	— எல்லை, வரம்பு
Limiting value	— எல்லை மதிப்பு
Maximum	— மீப்பெரு
Minimum	— மீச்சிறு
Substitution	— பிரதியிடல்
Variable	— மாறி

கண இயற்கணிதம்

(Set Algebra)

Domain	— (எண்) அரங்கம்
Image	— பிம்பம், எதிருருவம், பிரதியீடு
Mapping	— (அமைப்பு) மாற்றம்
Mapping into	— உள் மாற்றம்

Mapping onto	— மேல் மாற்றம்
Ordered pairs	— வரிசைமுறை சோடிகள்
Range	— வீச்சு
Set	— கணம்
Finite set	— முடிவுறு கணம்
Infinite set	— முடிவுருக் கணம்
Null set	— பூச்சிய கணம்
Power set	— அடுக்குக் கணம்
Subset	— உட்கணம்
Super set	— பெருங்கணம்
Universal set	— இனமுழுக் கணம்
Complement of a set	— நிரப்புக் கணம்
Elements of a set	— கண உறுப்புகள்
Intersection of sets	— கணங்களின் இடைவெட்டு
Union of sets	— கணங்களின் சேர்க்கை
Singleton	— தனிநிலை கணம்